Les Equations Cartésiennes

Rappels

- Si deux **droites** (AB) et (CD) sont **parallèles**, alors les **vecteurs** $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{DC}(x', y')$ sont dits **colinéaires**.
  On a alors qu'un vecteur est multiple de l'autre, et le **déterminant** **(différence des produits en croix)** des coordonnées est **nul**, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}}$ $(k \in \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{xy' - x'y = 0}$.

- Si deux **droites** (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**, alors les **vecteurs** $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{DC}(x', y')$ sont dits **orthogonaux**.
  On a alors que le **produit scalaire** est **nul**, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0}$, donc $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$

- De manière générale, on peut dire que l'équation cartésienne d'une droite qui a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\boldsymbol{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ est de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$.

Exercices

Exercice 1

Soient deux points $A(-3{,}3)$ et $B(-2{,}1)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 2 :

Soient trois points $A(-2{,}3)$, $B(-1{,}1)$ et $C(-5{,}3)$. Donner une équation cartésienne de la droite (d), passant par C et parallèle à (AB).

Exercice 3 :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').
Soient $A(-5;2) \in (d)$ et $B(-1;0) \in (d')$.

1) Les droites (d) et (d') sont-elles perpendiculaires ?

2) Donner les coordonnées de I, l'intersection de (d) et (d').

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander.

Corrigés

Exercice 1

Soient deux points $A(-3{,}3)$ et $B(-2{,}1)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-(-3) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 - 2 \times 1 = 0$$

Soit $M(x\,;y) \in (AB)$, si $M \in (d)$, on a alors $\overrightarrow{AM}$ orthogonal à $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 2(x+3) + 1(y-3) = 0$$
$$2x + 6 + y - 3 = 0$$
$$2x + y + 3 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est :
$(AB) : 2x + y + 3 = 0$

Exercice 2 :

Soient trois points $A(-2{,}3)$, $B(-1{,}1)$ et $C(-5{,}3)$. Donner une équation cartésienne de la droite (d), passant par C et parallèle à (AB).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $M(x\,;y) \in (d)$, si $M \in (d)$, on a alors $\overrightarrow{CM}$ orthogonal à $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 2(x+5) + 1(y-3) = 0$$
$$2(x+5) + 1(y-3) = 0$$
$$2x + 10 + y - 3 = 0$$
$$2x + y + 7 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (d) est :
$(d) : 2x + y + 7 = 0$

EXERCICE 3 :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').
Soient $A(-5;2) \in (d)$ et $B(-1;0) \in (d')$.

1) Les droites (d) et (d') sont-elles perpendiculaires ?

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 2 + 1 \times (-4) = 4 - 4 = 0$$

Les droites sont perpendiculaires.

2) Donner les coordonnées de I, l'intersection de (d) et (d').

Equation cartésienne de (d) :

Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Vecteur normal : $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$A(-5;2) \in (d)$

Soit $M(x\,;y) \in (d)$, si $M \in (d)$, on a alors $\overrightarrow{AM}$ orthogonal à $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}x+5\\y-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v} = 2(x+5) - 4(y-2) = 0$$

$$2x + 10 - 4y + 8 = 0$$

$$2x - 4y + 18 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (d) est :

$(d) : 2x - 4y + 18 = 0$

Equation cartésienne de (d') :

Vecteur directeur : $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

Vecteur normal : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$B(-1;0) \in (d')$

Soit $M'(x'\,;y') \in (d)$, si $M' \in (d)$, on a alors $\overrightarrow{BM'}$ orthogonal à $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{BM'} = \begin{pmatrix}x'+1\\y'\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM'}\cdot\vec{u} = 2(x'+1) + y' = 0$$

$$2(x'+1) + y' = 0$$

$$2x' + y' + 2 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (d') est :

$(d') : 2x' + y' + 2 = 0$

Intersection de (d) et (d') :

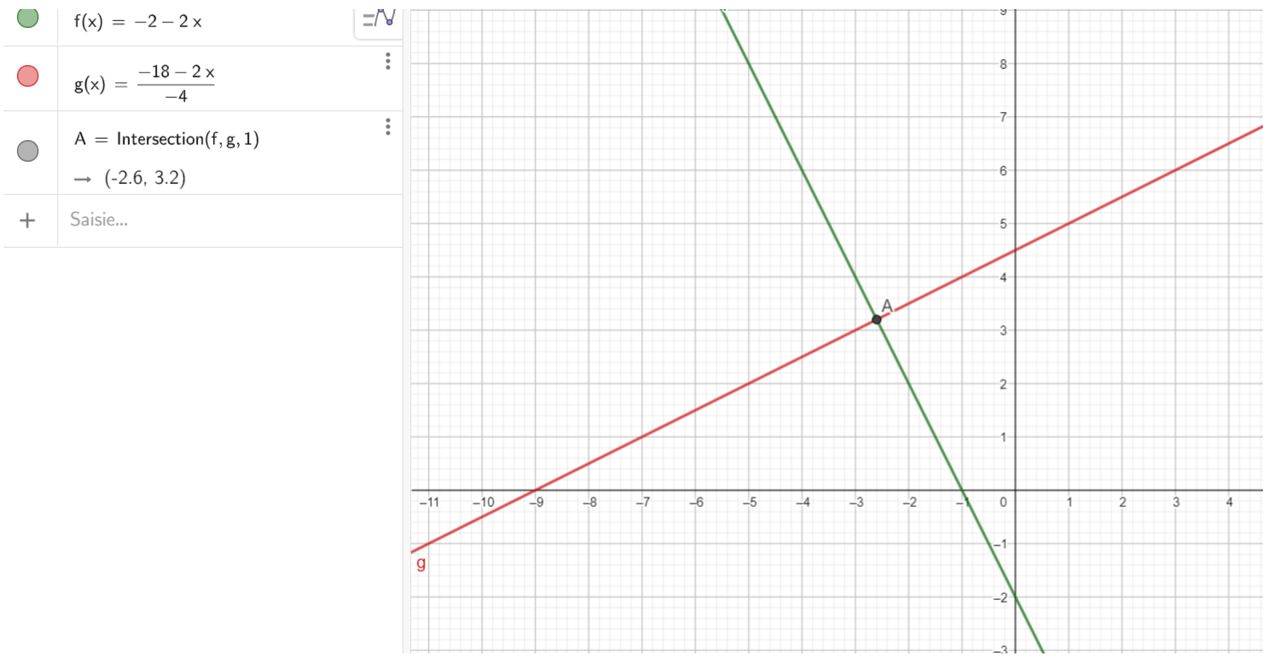
$$I \in (d) \text{ et } I \in (d')$$

Donc les coordonnées de I vérifient aussi bien l'équation de (d) que l'équation de (d').

Soit (x_I, y_I) les coordonnées de I, on a donc :

$$\begin{cases} 2x_I - 4y_I + 18 = 0\ (l1) \\ 2x_I + y_I + 2 = 0\ (l2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y_I + 16 = 0\ (l1 - l2) \\ 10x_I + 26 = 0\ (l1 + 4l2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_I = \dfrac{16}{5} \\ x_I = -\dfrac{26}{10} \end{cases}$$

Les coordonnées de I sont $\left(-\frac{26}{10} ; \frac{16}{5}\right)$.



Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander.