# Révisions Récurrence

## Exercices

**6.** *Un classique :* Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

Prouver que pour tout entier $n \geq 1$ : $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit P la propriété « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Montrons que P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

**Initialisation**

Vérifions que P est vraie pour $n = 1$.

D'une part, on a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

On a bien :

$$S_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Donc P est vraie pour $n = 1$.

**Hérédité**

Supposons que P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier.

Montrons que P est vraie pour $n = k' + 1$.

Autrement dit, supposons que $S_{k'} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6}$,

Montrons que $S_{k'+1} = \frac{(k'+1)(k'+2)(2(k'+1)+1)}{6} = \frac{(k'+1)(k'+2)(2k'+3)}{6}$.

$$S_{k'} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6} \quad et \; S_{k'+1} = S_{k'} + (k'+1)^2$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6} + (k'+1)^2$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1) + 6(k'+1)^2}{6}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)\big(k'(2k'+1) + 6(k'+1)\big)}{6}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)\big(2k'^2 + k' + 6k' + 6\big)}{6}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)\big(2k'^2 + 7k' + 6\big)}{6}$$

$$(k'+2)(2k'+3) = 2k'^2 + 3k' + 4k' + 6 = 2k'^2 + 7k' + 6$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)(k'+2)(2k'+3)}{6}$$

Donc P est vraie pour $n = k' + 1$.

**Conclusion**

On sait que P est vraie pour $n = 1$ et si P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier alors P est vraie pour $n = k' + 1$, donc P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$ et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Soit la P la propriété à démontrer.

Montrons par récurrence que P est vraie pour tout $n \geq 1$.

**Initialisation**

Montrons que P est vraie pour $n = 1$.

D'une part :

$$f'(x) = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

D'autre part :

$$\frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

Donc P est vraie pour $n = 1$.

**Hérédité :**

Supposons que P est vraie pour $n = k$ montrons que P est vraie pour $n = k + 1$.

Autrement dit, supposons que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = n! \times \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

Montrons que :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

On a :

$$f^{(n)}(x) = n! \times \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = n! \times \frac{-(n+1)(1-x)^n \times (-1)}{((1-x)^{n+1})^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n! \times (n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{v}$$

$$g'(x) = \frac{-v'}{v^2}$$

$$v = (1-x)^{n+1} = u^m$$

$$v' = mu^{m-1} \times u'$$
$$v' = (n+1)(1-x)^n \times (-1)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Donc P est vraie pour $n = k + 1$.

**Conclusion**

On sait que P est vraie pour $n = 1$ et si P est vraie pour $n = k$ alors P est vraie pour $n = k + 1$, donc P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

## Exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Soit P la propriété « $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ » avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Montrons que P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

**Initialisation**

Vérifions que P est vraie pour $n = 1$.

D'une part, on a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

On a bien :

$$S_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Donc P est vraie pour $n = 1$.

**Hérédité**

Supposons que P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier.

Montrons que P est vraie pour $n = k' + 1$.

Autrement dit, supposons que $S_{k'} = \frac{k'^2(k'+1)^2}{4}$,

Montrons que $S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2(k'+2)^2}{4}$.

$$S_{k'} = \frac{k'^2(k'+1)^2}{4} \; et \; S_{k'+1} = S_{k'} + (k'+1)^3$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'^2(k'+1)^2}{4} + (k'+1)^3$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'^2(k'+1)^2 + 4(k'+1)^3}{4}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2\left(k'^2 + 4(k'+1)\right)}{4}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2(k'^2 + 4k' + 4)}{4}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2(k'+2)^2}{4}$$

Donc P est vraie pour $n = k' + 1$.

**Conclusion**

On sait que P est vraie pour $n = 1$ et si P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier alors P est vraie pour $n = k' + 1$, donc P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

## Exercice 3 - Devoir 1

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 10 \end{cases}$.

**1.** Montrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n < 50$.

Soit P la propriété $u_n < 50$.

***Initialisation***

$$u_0 = 5 < 50$$

Donc P est vraie au rang $n = 0$.
*L'initialisation est vérifiée.*

***Hérédité***

Supposons que P soit vraie au rang $n = k$. Montrons que P est vraie au rang $n = k + 1$.

$$u_k < 50$$
$$0{,}8u_k < 0{,}8 \times 50$$
$$0{,}8u_k < 40$$
$$0{,}8u_k + 10 < 40 + 10$$

Comme $u_{k+1} = 0{,}8u_k + 10$, on a :

$$u_{k+1} < 50$$

Donc si P est vraie au rang $n = k$, alors P est vraie au rang $n = k + 1$.
*L'hérédité est vérifiée.*

***Conclusion***

On sait que P est vraie au rang $n = 0$, de plus, si P est vraie au rang $k$ alors P est vraie au rang $k + 1$, donc P est vraie pour tout entier $n$.

## Exercice 4

$(u_n)$ est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n = n(n+1)$.

Montrons que pour tout entier naturel $n$, $\underbrace{u_n = n(n+1)}_{\text{Propriété à démontrer}}$.

***Initialisation***

$$u_0 = 0 \; et \; 0(0+1) = 0 \; donc \; u_0 = 0(0+1)$$

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

***Hérédité***

Supposons que **la propriété est vraie au rang $n = k$**, avec $k \in \mathbb{N}$, montrons que la propriété est vraie au rang $n = k + 1$.

Je sais que, **d'après mon hypothèse de récurrence**, $u_k = k(k+1)$.
Je cherche à montrer que la propriété est vraie pour $k + 1$, donc $\underbrace{u_{k+1} = (k+1)(k+2)}_{\text{Propriété à démontrer}}$.

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 2 \text{ D'après la définition de la suite.}$$
$$u_{k+1} = k(k+1) + 2k + 2 \text{ D'après l'hypothèse d'hérédité}$$
$$u_{k+1} = k(k+1) + 2(k+1)$$
$$u_{k+1} = (k+1)(k+2)$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = k + 1$.

***Conclusion***

La propriété est vraie au rang $n = 0$, de plus, si elle est vraie à un certain rang, alors elle est vraie au suivant, donc la propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.

## Exercice 5

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $7^n - 1$ est divisible par $6$.

***Initialisation***

$7^0 - 1 = 0$ $or$ $0 \times 6 = 0$ donc 0 est bien divisible par 6.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

***Hérédité***

On suppose que P est vraie au rang $n = k$, montrons que P est vraie au rang $n = k + 1$.

Comme $7^k - 1$ est divisible par 6, il existe un entier $a$ tel que $7^k - 1 = 6a$.

$$7^k - 1 = 6a$$
$$7(7^k - 1) = 7 \times 6a$$
$$7^{k+1} - 7 = 7 \times 6a$$
$$7^{k+1} - 1 - 6 = 7 \times 6a$$
$$7^{k+1} - 1 = 7 \times 6a + 6$$
$$7^{k+1} - 1 = 6 \times (7a + 1)$$

Comme $a$ est un entier, alors $7a + 1$ est aussi un entier, donc $7^{k+1} - 1$ s'écrit sous la forme d'un produit entre 6 et un entier, donc il est divisible par 6.
La propriété est donc vraie au rang $n = k + 1$.

***Conclusion***

La propriété est vraie au rang $n = 0$, de plus, si elle est vraie à un certain rang, alors elle est vraie au suivant, donc la propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.