



RÉVISIONS RÉCURRENCE

Exercices

6. *Un classique* : Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

Prouver que pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit P la propriété « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » avec $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

Montrons que P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Initialisation

Vérifions que P est vraie pour $n = 1$.

D'une part, on a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

On a bien :

$$S_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Donc P est vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier.

Montrons que P est vraie pour $n = k' + 1$.

Autrement dit, supposons que $S_{k'} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6}$,

Montrons que $S_{k'+1} = \frac{(k'+1)(k'+2)(2(k'+1)+1)}{6} = \frac{(k'+1)(k'+2)(2k'+3)}{6}$.

$$S_{k'} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6} \text{ et } S_{k'+1} = S_{k'} + (k'+1)^2$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6} + (k'+1)^2$$





$$S_{k'+1} = \frac{k'(k' + 1)(2k' + 1) + 6(k' + 1)^2}{6}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k' + 1)(k'(2k' + 1) + 6(k' + 1))}{6}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k' + 1)(2k'^2 + k' + 6k' + 6)}{6}$$
$$S_{k'+1} = \frac{(k' + 1)(2k'^2 + 7k' + 6)}{6}$$

$$(k' + 2)(2k' + 3) = 2k'^2 + 3k' + 4k' + 6 = 2k'^2 + 7k' + 6$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k' + 1)(k' + 2)(2k' + 3)}{6}$$

Donc P est vraie pour $n = k' + 1$.

Conclusion

On sait que P est vraie pour $n = 1$ et si P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier alors P est vraie pour $n = k' + 1$, donc P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.



**Exercice 5**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Soit la P la propriété à démontrer.

Montrons par récurrence que P est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation

Montrons que P est vraie pour $n = 1$.

D'une part :

$$f'(x) = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

D'autre part :

$$\frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

Donc P est vraie pour $n = 1$.

Hérédité :

Supposons que P est vraie pour $n = k$ montrons que P est vraie pour $n = k + 1$.

Autrement dit, supposons que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = n! \times \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

Montrons que :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

On a :

$$f^{(n)}(x) = n! \times \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = n! \times \frac{-(n+1)(1-x)^n \times (-1)}{((1-x)^{n+1})^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n! \times (n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}$$

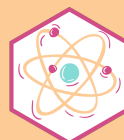
$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{v}$$

$$g'(x) = \frac{-v'}{v^2}$$

$$v = (1-x)^{n+1} = u^m$$

$$v' = mu^{m-1} \times u'$$

$$v' = (n+1)(1-x)^n \times (-1)$$



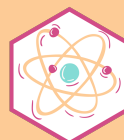


$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Donc P est vraie pour $n = k + 1$.

Conclusion

On sait que P est vraie pour $n = 1$ et si P est vraie pour $n = k$ alors P est vraie pour $n = k + 1$, donc P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.



**Exercice 2**

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Soit P la propriété « $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ » avec $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$.

Montrons que P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Initialisation

Vérifions que P est vraie pour $n = 1$.

D'une part, on a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

On a bien :

$$S_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Donc P est vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier.

Montrons que P est vraie pour $n = k' + 1$.

Autrement dit, supposons que $S_{k'} = \frac{k'^2(k'+1)^2}{4}$,

Montrons que $S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2(k'+2)^2}{4}$.

$$S_{k'} = \frac{k'^2(k'+1)^2}{4} \text{ et } S_{k'+1} = S_{k'} + (k'+1)^3$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'^2(k'+1)^2}{4} + (k'+1)^3$$

$$S_{k'+1} = \frac{k'^2(k'+1)^2 + 4(k'+1)^3}{4}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2(k'^2 + 4(k'+1))}{4}$$

$$S_{k'+1} = \frac{(k'+1)^2(k'^2 + 4k' + 4)}{4}$$



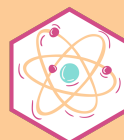


$$S_{k'+1} = \frac{(k' + 1)^2(k' + 2)^2}{4}$$

Donc P est vraie pour $n = k' + 1$.

Conclusion

On sait que P est vraie pour $n = 1$ et si P est vraie pour $n = k'$ avec $k' \geq 1$ un entier alors P est vraie pour $n = k' + 1$, donc P est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.





Exercice 3 - Devoir 1

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 10 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n < 50$.

Soit P la propriété $u_n < 50$.

Initialisation

$$u_0 = 5 < 50$$

Donc P est vraie au rang $n = 0$.

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité

Supposons que P soit vraie au rang $n = k$. Montrons que P est vraie au rang $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} u_k &< 50 \\ 0,8u_k &< 0,8 \times 50 \\ 0,8u_k &< 40 \\ 0,8u_k + 10 &< 40 + 10 \end{aligned}$$

Comme $u_{k+1} = 0,8u_k + 10$, on a :

$$u_{k+1} < 50$$

Donc si P est vraie au rang $n = k$, alors P est vraie au rang $n = k + 1$.

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion

On sait que P est vraie au rang $n = 0$, de plus, si P est vraie au rang k alors P est vraie au rang $k + 1$, donc P est vraie pour tout entier n .



**Exercice 4**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = n(n + 1)$.

Montrons que pour tout entier naturel n , $\underline{u_n = n(n + 1)}$.

Propriété à démontrer

Initialisation

$$u_0 = 0 \text{ et } 0(0 + 1) = 0 \text{ donc } u_0 = 0(0 + 1)$$

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité

Supposons que **la propriété est vraie au rang $n = k$** , avec $k \in \mathbb{N}$, montrons que la propriété est vraie au rang $n = k + 1$.

Je sais que, **d'après mon hypothèse de récurrence**, $u_k = k(k + 1)$.

Je cherche à montrer que la propriété est vraie pour $k + 1$, donc $\underline{u_{k+1} = (k + 1)(k + 2)}$.

Propriété à démontrer

$$u_{k+1} = \underline{u_k} + 2k + 2 \text{ D'après la définition de la suite.}$$

$$u_{k+1} = \underline{k(k + 1)} + 2k + 2 \text{ D'après l'hypothèse d'hérédité}$$

$$u_{k+1} = k(\underline{k + 1}) + 2(\underline{k + 1})$$

$$u_{k+1} = (\underline{k + 1})(k + 2)$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = k + 1$.

Conclusion

La propriété est vraie au rang $n = 0$, de plus, si elle est vraie à un certain rang, alors elle est vraie au suivant, donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n .





Exercice 5

Démontrer que pour tout entier naturel n , $7^n - 1$ est divisible par 6.

Initialisation

$7^0 - 1 = 0$ or $0 \times 6 = 0$ donc 0 est bien divisible par 6.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité

On suppose que P est vraie au rang $n = k$, montrons que P est vraie au rang $n = k + 1$.

Comme $7^k - 1$ est divisible par 6, il existe un entier a tel que $7^k - 1 = 6a$.

$$\begin{aligned}7^k - 1 &= 6a \\7(7^k - 1) &= 7 \times 6a \\7^{k+1} - 7 &= 7 \times 6a \\7^{k+1} - 1 - 6 &= 7 \times 6a \\7^{k+1} - 1 &= 7 \times 6a + 6 \\7^{k+1} - 1 &= 6 \times (7a + 1)\end{aligned}$$

Comme a est un entier, alors $7a + 1$ est aussi un entier, donc $7^{k+1} - 1$ s'écrit sous la forme d'un produit entre 6 et un entier, donc il est divisible par 6.

La propriété est donc vraie au rang $n = k + 1$.

Conclusion

La propriété est vraie au rang $n = 0$, de plus, si elle est vraie à un certain rang, alors elle est vraie au suivant, donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

