



LES NOMBRES COMPLEXES

Récapitulatif de cours

Ensemble \mathbb{C} : les Nombres Complexes

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Les règles des additions et des soustractions dans \mathbb{C} sont les mêmes que dans \mathbb{R} .
- Dans \mathbb{C} , il existe un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 - L'écriture $a + ib$ est appelée la forme algébrique de z .
 - Le nombre a est la **partie réelle**, on note $Re(z) = a$.
 - Le nombre b est la **partie imaginaire**, on note $Im(z) = b$.
 - ❖ Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
 - ❖ Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.
- Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Autrement dit :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

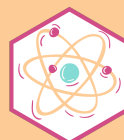
$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

- Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Autrement dit :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

$$z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$





Le conjugué d'un nombre complexe

- Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.
On appelle nombre complexe **conjugué** de z , le nombre, noté \bar{z} de forme algébrique $a - ib$.

Propriétés :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ avec } z \neq 0$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \text{ avec } z' \neq 0$$

- z est un réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Théorème : Formule du binôme

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Représentation dans le plan

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- Tout nombre complexe $z = a + ib$, peut être associé à une image, le point $M(a ; b)$ et le vecteur \vec{w} de coordonnées $(a ; b)$.
- On nomme z l'**affixe** de M et l'affixe de \vec{w} .
- On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Soient $M(z_M)$ et $N(z_N)$ deux points du plan et $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs du plan.

- Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour affixe $z_N - z_M$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz .
- Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$



**Le Module**

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

On appelle **module** de z , le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|-z| = |z|$$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

L'argument

Soit un point M d'affixe z non nulle.

On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

- z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Soient M, N et P trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_M, z_N et z_P .

$$AB = |b - a|$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a)$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)$$

Forme Trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. On pose : $\theta = \arg(z)$

On a alors : $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

La **forme trigonométrique** de z est :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$





Quelques formules

Soit a et b deux nombres réels quelconques.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

Le cercle trigonométrique

- Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.
- L'ensemble des points du plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) dont l'affixe appartient au cercle trigonométrique est noté \mathbb{U} .
- Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à \mathbb{U} . On a alors $a^2 + b^2 = 1$.

Forme Exponentielle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$e^{i\pi} = -1$$

La **forme exponentielle** d'un nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ est $z = r e^{i\theta}$.

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Formule de Moivre : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

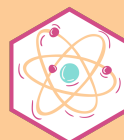
Ou encore :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Formules d'Euler : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$





Racine n -ième

Une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

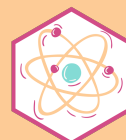
L'ensemble \mathbb{U}_n des racines de l'unité possède exactement n racines $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$.

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'autrice.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”





Exercices

Exercice 1

Soient $z = 3 + 4i$, $z' = -2 + i$ respectivement les affixes de M et M' .
Calculer la longueur MM' .

Exercice 2

$$A(3 - i) \quad B(-2i) \quad C(2 + 2i)$$

- 1) Calculer AB , AC et BC .
- 2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 3

On considère les points $A(\sqrt{8} - i\sqrt{8})$, $B(-4i)$ et $C(4)$.

- 1) Déterminer les distances OA , OB et OC .
- 2) Que peut-on en déduire ?

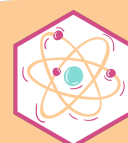
Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com

“

Aucune reproduction,
même partielle, autres que celles prévues
à l'article L 122-5 du code de la
propriété intellectuelle, ne peut être faite
de ce support sans l'autorisation
expresse de l'autrice.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”





Corrigés

Exercice 1

Soient $z = 3 + 4i$, $z' = -2 + i$ respectivement les affixes de M et M' .

Calculer la longueur MM' .

1^{ère} méthode :

$$M(3,4) \text{ et } M'(-2,1)$$

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$MM' = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

2^{ème} méthode :

$$MM' = |z' - z|$$

$$MM' = |(-2 + i) - (3 + 4i)|$$

$$MM' = |-2 + i - 3 - 4i|$$

$$MM' = |-5 - 3i|$$

$$MM' = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Exercice 2

$$A(3 - i) \quad B(-2i) \quad C(2 + 2i)$$

1) Calculer AB, AC et BC.

1^{ère} méthode (calcul AB) :

$$A(3, -1) \text{ et } B(0, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ -2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$





2^{ème} méthode (calcul AB) :

$$\begin{aligned}AB &= |z_B - z_A| \\AB &= |(-2i) - (3 - i)| \\AB &= |-2i - 3 + i| \\AB &= |-3 - i| \\AB &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

1^{ère} méthode (calcul AC) :

$$\begin{aligned}&A(3, -1) \text{ et } C(2, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ AC &= \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

2^{ème} méthode (calcul AC) :

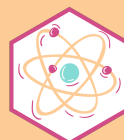
$$\begin{aligned}AC &= |z_C - z_A| \\AC &= |(2 + 2i) - (3 - i)| \\AC &= |2 + 2i - 3 + i| \\AC &= |-1 + 3i| \\AC &= \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

1^{ère} méthode (calcul BC) :

$$\begin{aligned}&B(0 ; -2) \text{ et } C(2 ; 2) \\ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ BC &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}\end{aligned}$$

2^{ème} méthode (calcul BC) :

$$\begin{aligned}BC &= |z_C - z_B| \\BC &= |2 + 2i - (-2i)| \\BC &= |2 + 2i + 2i| \\BC &= |2 + 4i| \\BC &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}\end{aligned}$$





- 2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

$$AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = 10 + 10 = 20$$
$$BC^2 = \sqrt{20}^2 = 20$$

On sait que dans le triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle est rectangle en A. *(En effet l'hypoténuse est BC, comme l'angle droit est opposé à ce côté, il est forcément en A).*

De plus, $AB = AC$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Exercice 3

On considère les points $A(\sqrt{8} - i\sqrt{8})$, $B(-4i)$ et $C(4)$.

- 1) Déterminer les distances OA, OB et OC.

$$OA = |\sqrt{8} - i\sqrt{8}| = \sqrt{\sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

$$OB = |-4i| = 4$$

$$OC = |4| = 4$$

- 2) Que peut-on en déduire ?

Comme A, B et C sont équidistant au point O, on déduit qu'ils sont tous les trois sur le cercle de centre O et de rayon 4.

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'autrice.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”

