Les Nombres Complexes

Récapitulatif de cours

Ensemble $\mathbb{C}$: les Nombres Complexes

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Les règles des additions et des soustractions dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, il existe un nombre noté i tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

- Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\boldsymbol{z = a + ib}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

  - L'écriture $a + ib$ est appelée la forme algébrique de z.
  - Le nombre a est la **partie réelle**, on note $Re(z) = a$.
  - Le nombre b est la **partie imaginaire**, on note $Im(z) = b$.

    - Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
    - Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.

- Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

  Autrement dit :

  Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$z = z' \iff a = a' \text{et } b = b'$$

- Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

  Autrement dit :

  Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

$$z = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

Le conjugué d'un nombre complexe

- Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.
  On appelle nombre complexe **conjugué** de z, le nombre, noté $\overline{z}$ de forme algébrique $a - ib$.

Propriétés :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \text{ avec } z \neq 0 \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \text{ avec } z' \neq 0$$

- z est un réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Théorème : Formule du binôme

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Représentation dans le plan

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- Tout nombre complexe $z = a + ib$, peut être associé à une image, le point $M\ (a\,; b)$ et le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,; b)$.

- On nomme z l'**affixe** de M et l'affixe de $\vec{w}$.

- On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Soient $M(z_M)$ et $N(z_N)$ deux points du plan et $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs du plan.

- Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz.
- Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$

Le Module

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z|^2 = z\bar{z} \qquad |\bar{z}| = |z| \qquad |-z| = |z|$$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$|zz'| = |z||z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

L'argument

Soit un point M d'affixe z non nulle.

On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

- z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) = 0[\pi]$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- $arg(\bar{z}) = -\,arg(z)$
- $arg(-z) = arg(z) + \pi$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$arg(zz') = arg(z) + arg(z') \qquad arg(z^n) = n\,arg(z)$$

$$arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\,(z) \qquad arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\,(z) - arg\,(z')$$

Soient M, N et P trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_M, z_N et z_P.

$$AB = |b - a| \qquad (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) \qquad (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)$$

Forme Trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. On pose : $\theta = arg\,(z)$
On a alors : $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$.

La forme trigonométrique de z est :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Quelques formules

Soit a et b deux nombres réels quelconques.

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

Le cercle trigonométrique

- Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.
- L'ensemble des points du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'affixe appartient au cercle trigonométrique est noté $\mathbb{U}$.
- Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$. On a alors $a^2 + b^2 = 1$.

Forme Exponentielle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$$

La **forme exponentielle** d'un nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ est $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$.

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boldsymbol{e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}} \qquad \boldsymbol{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}} \qquad \boldsymbol{\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$$

Formule de Moivre : $\forall\, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Formules d'Euler : $\forall\, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Racine n-ième

Une racine n-ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines de l'unité possède exactement n racines $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n-1$.

Exercices

Exercice 1

Soient $z = 3 + 4i, z' = -2 + i$ respectivement les affixes de M et M'.
Calculer la longueur MM'.

Exercice 2

$$A(3 - i) \qquad B(-2i) \qquad C(2 + 2i)$$

1) Calculer AB, AC et BC.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 3

On considère les points $A(\sqrt{8} - i\sqrt{8})$, $B(-4i)$ et $C(4)$.

1) Déterminer les distances OA, OB et OC.
2) Que peut-on en déduire ?

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com

Corrigés

Exercice 1

Soient $z = 3 + 4i, z' = -2 + i$ respectivement les affixes de M et M'.

Calculer la longueur MM'.

1ère méthode :

$$M(3,4)\ et\ M'(-2,1)$$

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$MM' = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

2ème méthode :

$$MM' = |z' - z|$$
$$MM' = |(-2+i) - (3+4i)|$$
$$MM' = |-2+i-3-4i|$$
$$MM' = |-5-3i|$$
$$MM' = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Exercice 2

$$A(3-i) \qquad B(-2i) \qquad C(2+2i)$$

1) Calculer AB, AC et BC.

1ère méthode (calcul AB) :

$$A(3,-1)\ et\ B(0,-2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

2ème méthode (calcul AB) :

$$AB = |z_B - z_A|$$
$$AB = |(-2i) - (3 - i)|$$
$$AB = |-2i - 3 + i|$$
$$AB = |-3 - i|$$
$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

1ère méthode (calcul AC) :

$$A(3, -1)\ et\ C(2,2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

2ème méthode (calcul AC) :

$$AC = |z_C - z_A|$$
$$AC = |(2 + 2i) - (3 - i)|$$
$$AC = |2 + 2i - 3 + i|$$
$$AC = |-1 + 3i|$$
$$AC = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

1ère méthode (calcul BC) :

$$B(0\,; -2)\ et\ C(2\,; 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

2ème méthode (calcul BC) :

$$BC = |z_C - z_B|$$
$$BC = |2 + 2i - (-2i)|$$
$$BC = |2 + 2i + 2i|$$
$$BC = |2 + 4i|$$
$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

$$AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = 10 + 10 = 20$$
$$BC^2 = \sqrt{20}^2 = 20$$

On sait que dans le triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle est rectangle en A. *(En effet l'hypoténuse est BC, comme l'angle droit est opposé à ce côté, il est forcément en A).*
De plus, $AB = AC$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Exercice 3

On considère les points $A(\sqrt{8} - i\sqrt{8})$, $B(-4i)$ et $C(4)$.

1) Déterminer les distances OA, OB et OC.

$$OA = |\sqrt{8} - i\sqrt{8}| = \sqrt{\sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

$$OB = |-4i| = 4$$

$$OC = |4| = 4$$

2) Que peut-on en déduire ?
Comme A, B et C sont équidistant au point O, on déduit qu'ils sont tous les trois sur le cercle de centre O et de rayon 4.

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com