

Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Exercices

Exercice 1

Déterminer dans chacun des cas la limite demandée.

Cas n° 1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{1}{-2x - 6}$$

Cas n° 2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x - 3) \right)$$

Cas n° 3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1 - 4x}{x - 3}$$

Cas n° 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 - 3x}{x}$$



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Exercices

Exercice 2

Pour chaque limite, déduire s'il y a une asymptote, si oui, donner son équation.

Cas n°1

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

Cas n°2

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

Cas n°3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

Cas n°4

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$$

Cas n°5

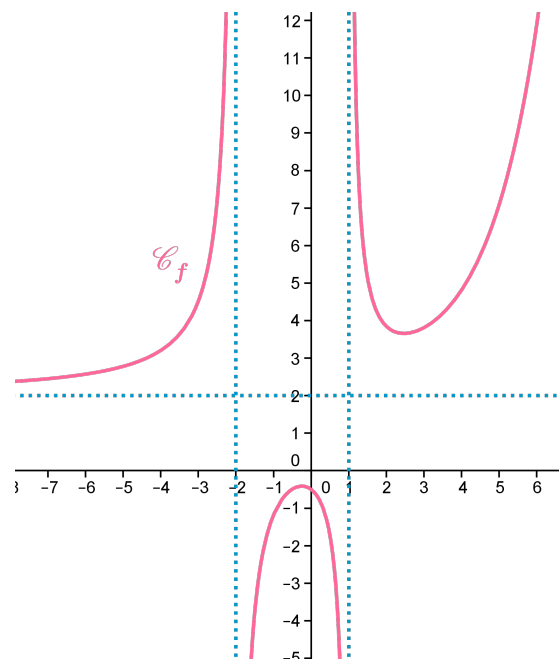
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$$

Cas n°6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 3

Déduire toutes les limites possibles grâce aux asymptotes à la courbe de f .



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Exercices

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x + 8 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x + 7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ définie

sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 & \text{si } x \leq -2 \\ x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2 .
- 2) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 6

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Corrigés

Exercice 1

Déterminer dans chacun des cas la limite demandée.

Cas n° 1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{1}{-2x - 6}$$

$$x > -3$$

$$-2x < -2 \times (-3)$$

$$-2x < 6$$

$$-2x - 6 < 6 - 6$$

$$-2x - 6 < 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} -2x - 6 = 0^- \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{1}{-2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{X} = -\infty$$

Cas n° 2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x - 3) \right)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 3 = -3 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x - 3) \right) = -\infty$$



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Cas n° 3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1 - 4x}{x - 3}$$

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 1 - 4x = -11 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} x - 3 = 0^+ \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1 - 4x}{x - 3} = -\infty$$

Cas n° 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 - 3x}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} + 2 - 3x}{x} &= \frac{x \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} - 3 \right)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} - 3 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - 3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+ \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - 3 = -3$$



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Corrigés

Exercice 2

Pour chaque limite, déduire s'il y a une asymptote, si oui, donner son équation.

Cas n°1

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

Pas d'asymptote

Cas n°2

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

Asymptote verticale :
 $x = -3$

Cas n°3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

Asymptote
horizontale :
 $y = -3$

Cas n°4

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$$

Asymptote verticale :
 $x = 5$

Cas n°5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$$

Asymptote
horizontale :
 $y = 6$

Cas n°6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Pas d'asymptote



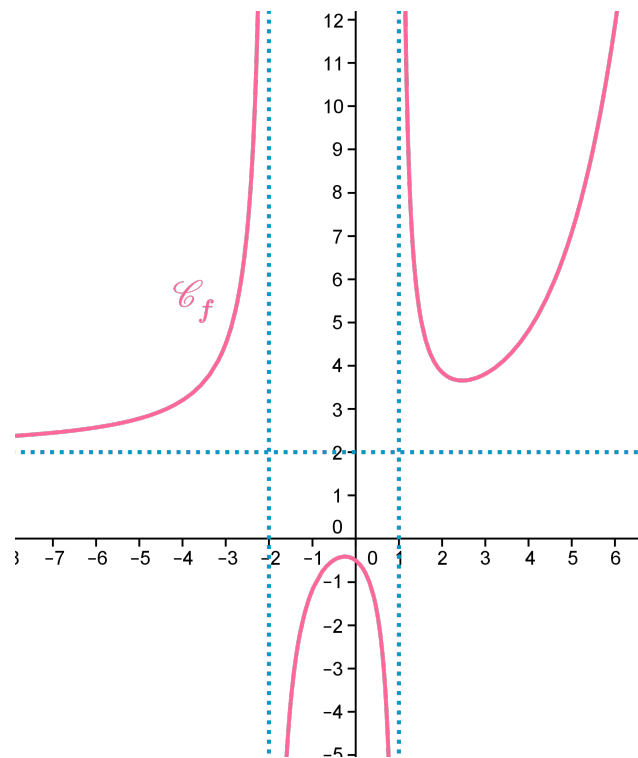
Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Exercice 3

Déduire toutes les limites possibles grâce aux asymptotes à la courbe de f .



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Corrigés

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x + 8 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x + 7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ définie

sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} 6x + 8 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -3x + 7 = 10$$

$$f(-1) = 6 \times (-1) + 8 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$$

Donc la fonction n'est pas continue en -1 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} -3x + 7 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$$

Donc la fonction est continue en 2 .



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 & \text{si } x \leq -2 \\ x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{2}x - 3 = -4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x + 1 = -1$$

$$f(-2) = \frac{1}{2} \times (-4) - 3 = -4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$$

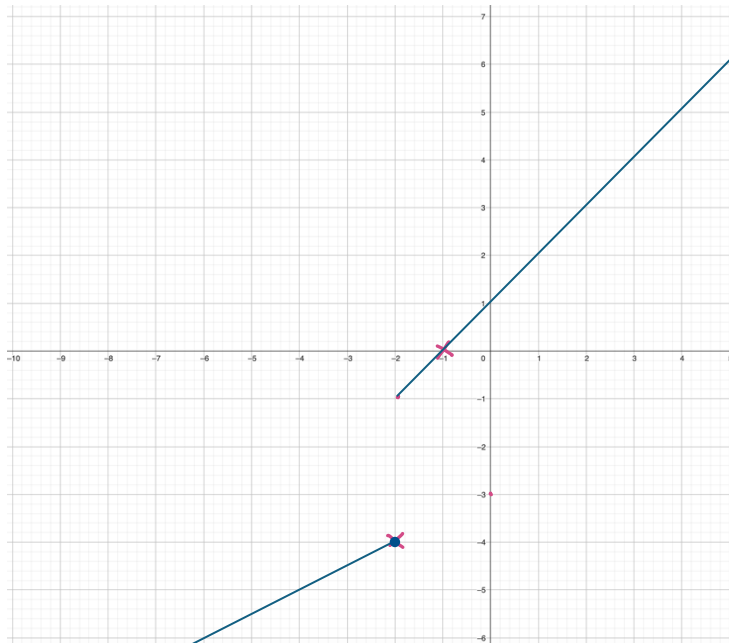
Donc la fonction n'est pas continue en -2 .



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale

- 2) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



Live : Limites de Fonctions

Niveau Terminale



Exercice 6

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} ax^2 + bx + 1 = 1a + 1b + 1 = a + b + 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x^2 + ax + b = 1 + 1a + b = a + b + 1$$

$$f(1) = 1a + 1b + 1 = a + b + 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1)$$

Donc la fonction est continue en 1.

