



QCM & VRAI / FAUX : LES SUITES

QCM

QCM 1 | Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{\pi}{e}\right)^n$?

- a) 0
- b) 1
- c) $+\infty$
- d) Pas de limite

Explication :

$e \approx 2,72$ et $\pi \approx 3,14$ donc $\frac{\pi}{e} > 1$

Or, si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n = +\infty$.

QCM 2 | Quelle est la limite de la suite $\frac{7n^2 - 3n + 5}{(4n - 1)(3n + 2)}$?

- a) 0
- b) $+\infty$
- c) $2/3$
- d) $7/12$

Explication :

$$\frac{7n^2 - 3n + 5}{(4n - 1)(3n + 2)} = \frac{7n^2 - 3n + 5}{12n^2 + 8n - 3n - 2} = \frac{7n^2 - 3n + 5}{12n^2 + 5n - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 3n + 5}{(4n - 1)(3n + 2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 3n + 5}{12n^2 + 5n - 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{12n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$





QCM 3 | Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_n \rightarrow 0$ et (b_n) est bornée. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- a) $(a_n + b_n) \rightarrow 0$.
- b) $(a_n b_n) \rightarrow 0$.
- c) Si (b_n) ne converge pas alors $(a_n b_n)$ diverge.
- d) Si $b_n \geq 0$ pour tout n , alors $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ sans hypothèse supplémentaire.

Explication :

(b_n) est bornée, cela signifie qu'elle est minorée et majorée. On déduit que la limite de (b_n) ne peut pas être $\pm\infty$.

Pour que $(a_n + b_n) \rightarrow 0$, il faudrait que $b_n \rightarrow 0$, ce qui n'est pas forcément le cas.

Comme $a_n \rightarrow 0$ et que la limite de (b_n) ne peut pas être $\pm\infty$, alors $(a_n b_n) \rightarrow 0$.

On vient d'expliquer que $(a_n b_n)$ converge vers 0, ce qui montre que la c) est fausse.

$b_n \geq 0$ signifie que (b_n) est minorée par 0, mais on peut avoir $b_n \rightarrow 0$, et donc la limite de $\frac{a_n}{b_n}$ serait une forme indéterminée.

QCM 4 | Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de **même limite l** . Laquelle est vraie ?

- a) $u_n - v_n \rightarrow 0$.
- b) $u_n v_n \rightarrow l$ pour tout l .
- c) Si $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 0$ alors $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$.
- d) Si $u_n - v_n \rightarrow 0$ alors u_n et v_n divergent.

Explication :

Dans le cours, on a vu que si deux suites (u_n) et (v_n) ont toutes deux une **limite réelle**, alors la limite de la somme est la somme des limites, la limite de la différence est la différence des limites, la limite du produit est le produit des limites.

On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) &= l + l = 2l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) &= l - l = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) &= l \times l = l^2 \end{aligned}$$

Attention ! Pour la limite du quotient, il faut faire attention aux limites qui tendent vers 0.

Si $l = 0$, on obtient ici une forme indéterminée.

Concernant la réponse d), l'énoncé nous dit que (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes, elles ne peuvent pas être divergentes.





QCM 5 | On définit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n} - 1$. On peut affirmer que la suite (u_n) :

- a) n'admet aucun terme nul.
- b) admet exactement un terme nul.
- c) admet une infinité de termes nuls.
- d) admet au moins un terme nul.

Explication :

Comme $u_0 = 0$, la suite admet au moins un terme nul. Mais on peut aller plus loin !

Soit P : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ ».

Montrons par récurrence que la propriété P est vraie.

Initialisation

Montrons que P est vraie au rang $n = 0$.

Par définition de la suite, on a : $u_0 = 0$.

Donc P est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité

Montrons que si P est vraie au rang $n = k$, alors P est vraie au rang $n = k + 1$.

Supposons que $u_k = 0$, montrons que $u_{k+1} = 0$.

$$u_{k+1} = e^{-u_k} - 1 \text{ par définition de la suite}$$

$$u_{k+1} = e^{-0} - 1 \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$u_{k+1} = 1 - 1 = 0$$

Donc P est vraie au rang $n = k + 1$.

Conclusion

P est vraie au rang $n = 0$, de plus si P est vraie au rang $n = k$, alors P est vraie au rang $n = k + 1$, donc P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

On conclut qu'il y a une infinité de termes nuls.





QCM 6 | On définit la suite (u_n) par :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

La suite (u_n) est :

- a) strictement croissante
- b) strictement décroissante
- c) non monotone
- d) constante

Explication :

Les premiers termes de la suite sont :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = 0 \qquad u_3 = 3 \qquad u_4 = 0$$

On déduit que la suite n'est pas croissante, n'est pas décroissante, et n'est pas constante.

On dira qu'elle est non monotone.

QCM 7 | Calculer

$$S_n = \sum_{k=1}^n (4k + 1)$$

- a) $n(3n + 1)$.
- b) $2n^2 + 3n$.
- c) $n(5n + 1)$.
- d) $4n^2 + n$.

Explication :

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$.

On souhaite finalement calculer la somme S_n des termes de la suite (u_n) de u_1 à u_n .

$$S_n = (n + 1 - a) \times \frac{u_a + u_n}{2}$$

$$S_n = (n + 1 - 1) \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$S_n = n \times \frac{5 + 1 + 4n}{2}$$

$$S_n = n \times \frac{6 + 4n}{2}$$

$$S_n = n \times (3 + 2n)$$

$$S_n = 2n^2 + 3n$$





QCM 8 | Soit $u_n = 3^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = u_n + 1$. Alors la suite (v_n) est :

- a) arithmétique de raison 1
- b) arithmétique de raison 3
- c) géométrique de raison 3
- d) ni arithmétique ni géométrique

Explication :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_n + 1} = \frac{3^{n+1} - 1 + 1}{3^n - 1 + 1} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3.

QCM 9 | Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-3)^k = 1 + (-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2n}$$

On peut alors affirmer que la suite (u_n) est :

- a) strictement croissante
- b) strictement décroissante
- c) constante
- d) non monotone

Explication :

Nous avons une somme de termes de suite géométrique de raison $r = -3$ et nous avons $2n + 1$ termes. On applique notre formule de la somme des termes :

$$u_n = \frac{1 - (-3)^{2n+1}}{1 - (-3)} = \frac{1 - (-3)^{2n}(-3)}{4} = \frac{1 - 9^n(-3)}{4} = \frac{1 + 3 \times 9^n}{4}$$

9^n est strictement croissante sur \mathbb{N} .

Donc $1 + 3 \times 9^n$ l'est aussi et donc u_n aussi.





QCM 10 | Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{e^{-n}}{n+1}$, on peut alors affirmer que :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Explication :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0^+ \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{n + 1} = 0^+$$

QCM 11 | Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2}{e^{-u_n+1}}$, on peut alors affirmer que :

- a) (u_n) est divergente
- b) (u_n) est croissante
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$
- d) (u_n) est décroissante

Explication :

Soit $f : x \mapsto \frac{2}{e^{-x}+1}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$f'(x) = \frac{2e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} \text{ on a } f'(x) > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante.

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Montrons par récurrence la propriété P : « Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$ ».

Initialisation

Montrons que P est vraie pour $n = 0$.

$$u_0 = 5 \text{ et } u_1 = \frac{2}{e^{-5}+1} \approx 1,99.$$

On a bien $u_0 > u_1$, donc P est vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Montrons que si P est vraie pour $n = k$, alors P est vraie pour $n = k + 1$.

Supposons que P est vraie pour $n = k$, montrons que P est vraie pour $n = k + 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_k > u_{k+1}$$

Comme f est strictement croissante, on a :

$$f(u_k) > f(u_{k+1})$$

Par définition de la suite (u_n) , on a :

$$u_{k+1} > u_{k+2}$$





Donc P est vraie pour $n = k + 1$.

Donc si P est vraie pour $n = k$, alors P est vraie pour $n = k + 1$.

Conclusion

On sait que P est vraie pour $n = 0$ et si P est vraie pour $n = k$, alors P est vraie pour $n = k + 1$.

Donc P est vraie pour tout entier naturel n .

QCM 12 | Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, et soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{\pi}{u_n}$. On peut alors affirmer que la suite (v_n) est :

- a) arithmétique
- b) bornée
- c) géométrique
- d) convergente

Explication :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\pi}{u_{n+1}} - \frac{\pi}{u_n} = \frac{\pi}{\frac{u_n}{1+u_n}} - \frac{\pi}{u_n} = \pi \times \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{\pi}{u_n} = \frac{\pi + \pi u_n - \pi}{u_n} = \pi$$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison π .

QCM 13 | Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \text{ et } v_n = \frac{u_n + 6}{u_n - 1}$$

On peut alors affirmer que :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -6$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n + 6}{u_n - 1} = \frac{\frac{n+1}{n+2} + 6}{\frac{n+1}{n+2} - 1} = \frac{\frac{n+1 + 6(n+2)}{n+2}}{\frac{n+1 - (n+2)}{n+2}} = \frac{n+1 + 6(n+2)}{n+1 - (n+2)} = \frac{n+1 + 6n + 12}{n+1 - n - 2} \\ &= \frac{7n + 13}{-1} = -7n - 13 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -7n - 13 = -\infty$$





QCM 14 | Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{5} + 2 \end{cases}$$

On peut alors affirmer que :

- a) (u_n) diverge
- b) (u_n) est strictement croissante
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$
- d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10 \times 0,6^n + 2n$

Explication :

$$u_0 = 10 ; u_1 = \frac{3 \times 10}{5} + 2 = 8 ; u_2 = \frac{3 \times 8}{5} + 2 = 6,8$$

La suite (u_n) n'est pas croissante.

On sait que la fonction $g : x \rightarrow \frac{3}{5}x + 2$ est continue sur \mathbb{R} (fonction affine), et $u_{n+1} = g(u_n)$.

D'après le théorème du point fixe, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

Avec L la solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \frac{3}{5}x + 2 &= x \\ x - \frac{3}{5}x &= 2 \\ \frac{2}{5}x &= 2 \\ x &= 2 \times \frac{5}{2} = 5 \end{aligned}$$

On a bien $L = 5$.





Vrai/Faux

Question 1 | La suite $\left(\frac{(-2)^{n+1}}{1-2^n}\right)$ n'admet pas de limite (elle oscille).

Vrai. Explication :

Pour n pair, l'expression de la suite est $\frac{-2^{n+1}}{1-2^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2^{n+1}}{1-2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{-1+2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^n}}{\frac{-1+2^n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^1}{-2^{-n}+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-0+1} = 2$$

Pour n impair, l'expression de la suite est $\frac{2^{n+1}}{1-2^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{1-2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^n}}{\frac{1-2^n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^1}{2^{-n}-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2^1}{1} = -2$$

La suite oscille.

Question 2 | La suite $\left(\frac{(-1)^n n}{1-n}\right)$ n'admet pas de limite.

Vrai. Explication :

$$\frac{(-1)^n n}{1-n} = (-1)^n \times \frac{n}{1-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{-n} = -1$$

Le facteur $(-1)^n$ oscille entre -1 et 1 donc la suite $\left(\frac{(-1)^n n}{1-n}\right)$ oscillera entre des valeurs proches de -1 et 1 pour $n \rightarrow +\infty$.

Question 3 | Toute suite géométrique (u_n) de raison q vérifiant $|q| < 1$ converge.

Vrai. Explication :

Si $|q| < 1$, autrement dit si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_p q^{n-p} = 0$ avec u_p le premier terme de la suite.





Question 4 | On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$$

a) La suite u est géométrique de raison $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Faux. Explication :

La raison d'une suite géométrique doit être constante, or $1 + \frac{1}{n}$ est fonction de n .

b) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = n$.

Vrai. Explication :

Soit P : « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$ ».

Montrons par récurrence que la propriété P est vraie.

Initialisation

Montrons que P est vraie au rang $n = 1$.

Par définition de la suite, on a : $u_1 = 1$.

Donc P est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité

Montrons que si P est vraie au rang $n = k$, alors P est vraie au rang $n = k + 1$.

Supposons que $u_k = k$, montrons que $u_{k+1} = k + 1$.

Par définition de la suite :

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) u_k$$

Par hypothèse de récurrence, $u_k = k$ donc :

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) k = k + \frac{k}{k} = k + 1$$

Donc P est vraie au rang $n = k + 1$.

Conclusion

P est vraie au rang $n = 1$, de plus si P est vraie au rang $n = k$, alors P est vraie au rang $n = k + 1$, donc P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) La suite u est décroissante à partir de $n = 2$.

Faux. Explication :

D'après la question précédente, $u_n = n$. Cette suite est strictement croissante sur \mathbb{N}^* .

d) La suite u est convergente.

Faux. Explication :

D'après la question précédente, $u_n = n$. La limite de cette suite est $+\infty$.

