Automatismes

Bac 1ère Générale

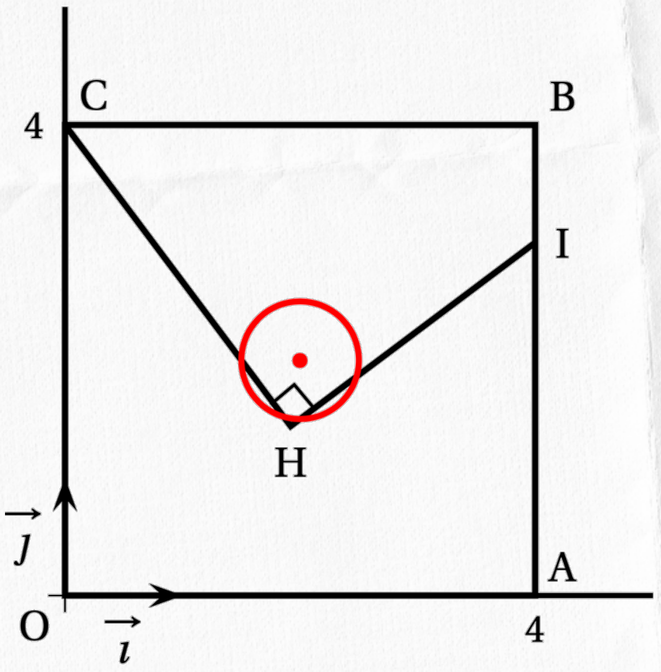
Spé - Sujet 0 n°1

Partie 2

Pop'iSchool

Exercice 1

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Aide au calcul :

$0,5^2 = 0,25$

$1,5^2 = 2,25$

$2,5^2 = 6,25$

$5 \times 2,4 = 12$

On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère OABC est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4;\ 0)$, $B(4;\ 4)$, $C(0;\ 4)$, $I(4;\ 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2\ ;\ 2)$ et de rayon 0,5.

Un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On a $C(0;\ 4)$, $I(4;\ 3)$;

1) A. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$.

   B. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$.

$$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 12$$

Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI)

2) A. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI.

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = 12$$

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH} = OI \times OH$$

$$\overrightarrow{OI} = \binom{4}{3}$$

B. Calculer la longueur OI.

C. En déduire que $OH = 2,4$.

Automatismes

$$OI = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$OI \times OH = 12$$

$$5 \times OH = 12$$

$$OH = \frac{12}{5} = 2,4$$

Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) donc $(CH) \perp (OI)$.

$$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \ et \ C(0;\ 4)$$

3) A. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH).

$$(CH)\ :\ ax + by + c = 0$$

$$(CH)\ :\ 4x + 3y + c = 0$$

Comme $C(0;\ 4) \in (CH)$, on a :

$$4 \times 0 + 3 \times 4 + c = 0$$

$$12 + c = 0$$

$$c = -12$$

$$(CH)\ :\ 4x + 3y - 12 = 0$$

On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2\,;\,2)$ et de rayon 0,5.

B. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0$$

Soit $P(x; y)$ un point du cercle, $P \in \mathcal{E}$ si

$$DP = 0,5$$

$$DP = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 0,5$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 0,25$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0,25$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - 0,25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0$$

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0$$
$$(CH) : \ 4x + 3y - 12 = 0$$

C. Le point $M(1,5\ ;2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Automatismes

$$M(1,5\,;2)$$

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0$$

$$1,5^2 + 2^2 - 4 \times 1,5 - 4 \times 2 + 7,75$$

$$= 2,25 + 4 - 6 - 8 + 7,75$$

$$= 10 + 4 - 6 - 8 = 0$$

$$(CH) :\ 4x + 3y - 12 = 0$$

$$4 \times 1,5 + 3 \times 2 - 12 = 6 + 6 - 12 = 0$$

Les coordonnées de M vérifient à la fois l'équation de $\mathcal{E}$ et l'équation de (CH), donc M appartient à $\mathcal{E}$ et à (CH), donc M appartient à leur intersection.

Exercice 2

On se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthogonal.

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 - 5x + 4$.

On note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction g.

a. Étudier le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Automatismes

$$g(x) = x^2 - 5x + 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 = 3^3$$

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \; et \; x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	

$$g(x) = x^2 - 5x + 4$$

b. On considère un entier naturel n quelconque. On note A_n le point de la courbe $\mathcal{P}$ d'abscisse n. On note a_n le coefficient directeur de la droite (A_nA_{n+1}).

Justifier que pour tout entier naturel n, on a $a_n = 2n - 4$.

$$A_n\left(n\,;g(n)\right)\ et\ A_{n+1}\left(n+1\,;g(n+1)\right)$$

$$a_n=\frac{g(n+1)-g(n)}{n+1-n}$$

$$a_n=\frac{(n+1)^2-5(n+1)+4-(n^2-5n+4)}{1}$$

$$a_n=n^2+2n+1-5n-5+4-n^2+5n-4$$

$$a_n=2n-4$$

$$a_n = 2n - 4$$

c. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

$$a_n = 2n - 4$$

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 4 - (2n - 4)$$
$$= 2n + 2 - 4 - 2n + 4 = 2$$

(a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $a_0 = 2 \times 0 - 4 = -4$.

$$g(x) = x^2 - 5x + 4$$

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par :

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f.

a. Vérifier que pour tout réel x, de l'intervalle $[0,5\ ; 8]$ on a $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$$

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{4}{x}$$

$$\frac{g(x)}{x} = x - 5 + \frac{4}{x}$$

$$\frac{g(x)}{x} = f(x)$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}$$

b. À l'aide de la question 1) A., déterminer la position de $\mathcal{C}$ (la courbe représentative de la fonction f) par rapport à l'axe des abscisses.

Automatismes

x	$-\infty$		0		$0,5$		1		4		8		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

$\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0,5\,;1]$ et $[4\,;8]$, et en dessous de l'axe des abscisses sur $[1;4]$.

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}$$

c. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$. Montrer que tout réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

Automatismes

x	$0,5$		2		8
$x-2$		$-$		$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	$3,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$3,5$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0,5\,;1]$ et $[4\,;8]$, et en dessous de l'axe des abscisses sur $[1;4]$.

x	$0,5$		2		8
f	$3,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$3,5$

e. Réaliser un schéma de l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ sur lequel apparaîtront les résultats des questions 2)B et 2)D.