Polynômes de degré 2

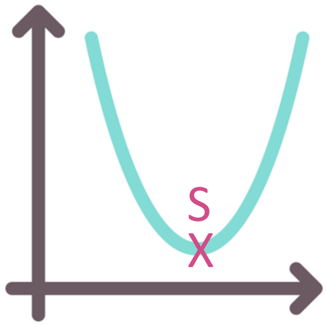
Cours

Généralités sur les Fonctions Polynômes de degré 2

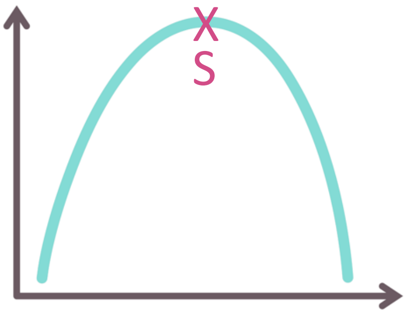
Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est une parabole.



- Si $a > 0$, alors la parabole est dite « tête en bas ».



- Si $a < 0$, alors la parabole est dite « tête en haut ».

On appelle le point $S(\alpha\,;\beta)$ ou $S\big(p\,;f(p)\big)$ le sommet de la parabole avec :

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

x_1 et x_2 les racines du polynôme, c'est-à-dire les valeurs qui annulent le polynômes (leur image vaut 0).

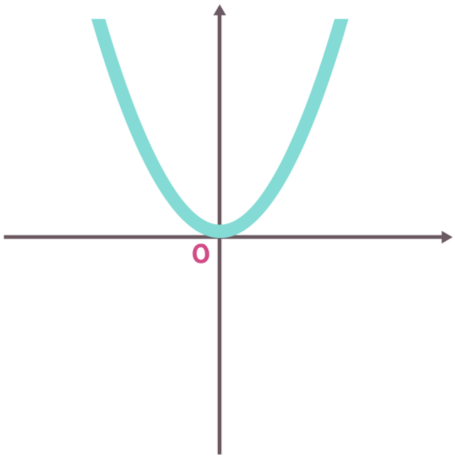
- Si la parabole est « tête en bas », alors le sommet est le point de la parabole ayant la plus basse ordonnée.
- Si la parabole est « tête en haut », alors le sommet est le point de la parabole ayant la plus haute ordonnée.

Polynômes de degré 2

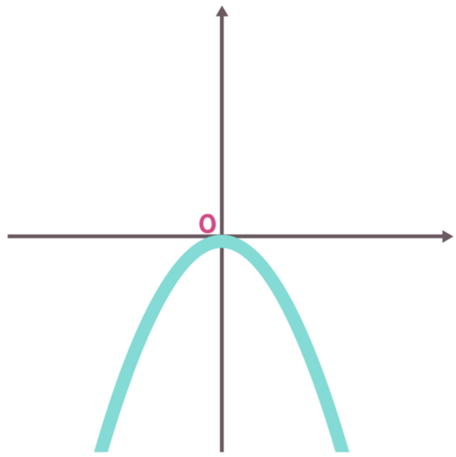
Polynômes de degré 2 du type ax^2 ou $ax^2 + b$

$$f(x) = ax^2$$

$a > 0$



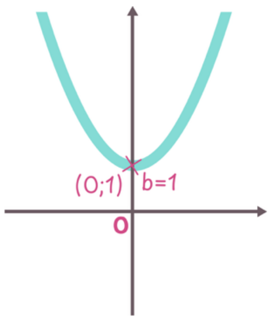
$a < 0$



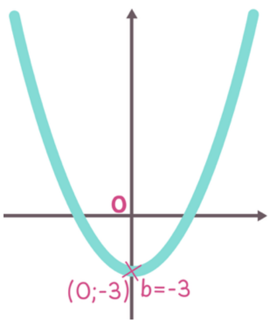
$$f(x) = ax^2 + b$$

$a > 0$

$b = 1$

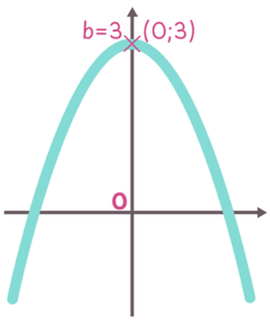


$b = -3$

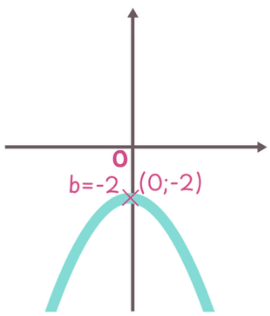


$a < 0$

$b = 3$



$b = -2$



Toutes **ces paraboles** ont pour **axe de symétrie** **<u>l'axe des ordonnées</u>**.

Polynômes de degré 2

Formes Factorisées et Polynômes de degré 2

Situation 1 : Deux racines du polynôme

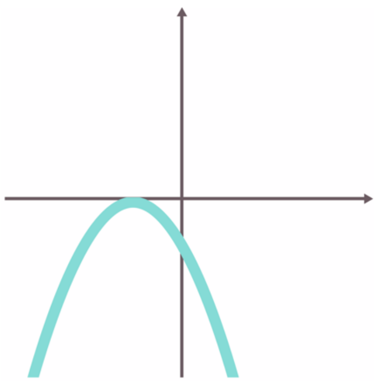
La forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, où les appelles aussi les racines de f. Cela signifie qu'il y a deux valeurs de x que l'on nomme x_1 et x_2 qui annulent le polynôme. Autrement dit, $f(x_1) = 0$ **et** $f(x_2) = 0$.

Tout polynôme a un axe de symétrie, cet axe est la droite d'équation $x = p$.

x_1 est le *symétrique* de x_2 par rapport à cet axe, donc p est le milieu de $[x_1;\ x_2]$. Donc pour déterminer les coordonnées de p on peut calculer la **moyenne** entre x_1 **et** x_2. Donc :

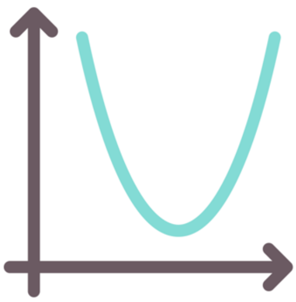
$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Situation 2 : Une seule racine du polynôme



Cela signifie qu'il y a une seule valeur de x que l'on nomme x_0 qui annule le polynôme. Autrement dit, $f(x_0) = 0$.

Le minimum est donc atteint en ce x_0 et il **vaut 0**. Ce x_0 est notre p, aussi appelé α. Et $f(p) = f(\alpha)$, qui est aussi appelé β, vaut 0.
Sa forme factorisée : $f(x) = a(x - x_0)^2$



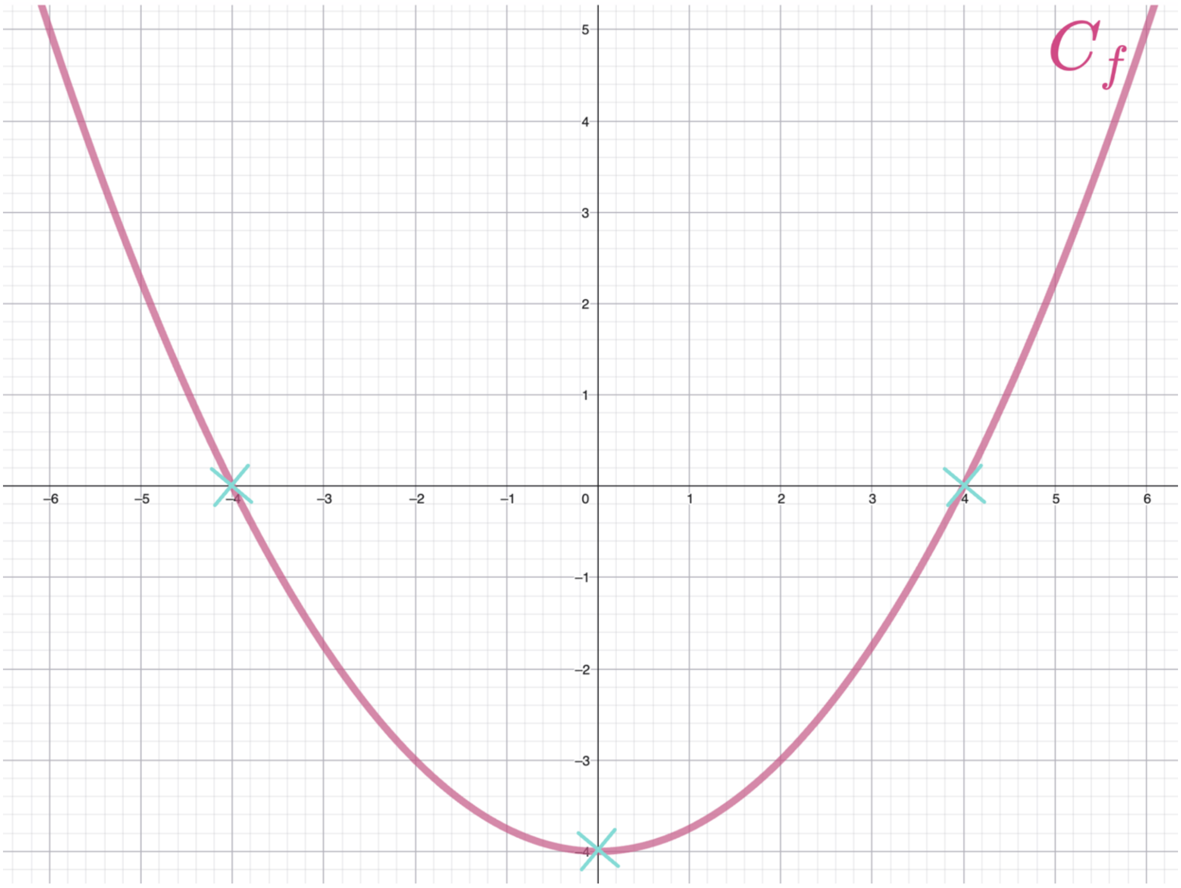
Situation 3 : Aucune racine du polynôme.

Le polynôme est ou bien tête en bas et au-dessus de l'axe des ordonnées (comme sur l'illustration) ou alors il est tête en haut et en-dessous de l'axe des ordonnées.
À noter : Il n'y a pas de forme factorisée.

Polynômes de degré 2

Quiz

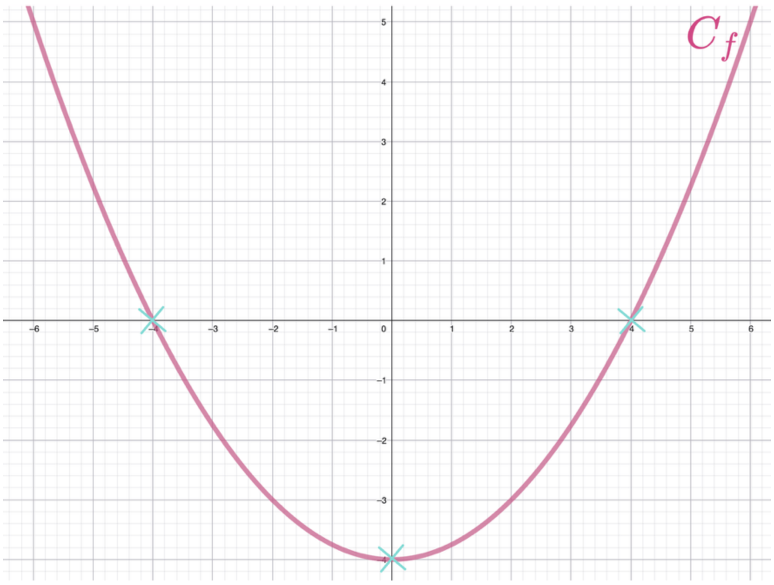
Soit f une fonction polynôme de degré 2 et C_f sa courbe représentative.
Retrouver l'expression de $f(x)$.



Polynômes de degré 2

Explications

Soit f une fonction polynôme de degré 2 et C_f sa courbe représentative.
Retrouver l'expression de $f(x)$.



f est une fonction polynôme de degré 2, dont la courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
Donc son expression est du type : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + b}$
La courbe passe par le point $(0; -4)$ donc on déduit que $b = -4$.
On obtient : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 - 4}$
De plus, le point $(4; 0)$ appartient aussi à la courbe, on conclut que : $\boldsymbol{f(4) = 0}$
Mais $\boldsymbol{f(4) = a \times 4^2 - 4}$ donc on obtient : $\boldsymbol{a \times 4^2 - 4 = 0}$

$$\boldsymbol{16a - 4 = 0}$$
$$\boldsymbol{a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$$

Finalement on a : $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4}$.

Polynômes de degré 2

Exercices

Exercice 1

Factoriser les expressions suivantes.

1)
$$A = x^2 - 36$$

2)
$$B = 9x^2 - 25$$

3)
$$C = 1 - 4y^2$$

4)
$$D = (-2x + 1)^2 - 4$$

5)
$$E = 25 - (2x + 5)^2$$

Exercice 2

Dresser le tableau de signe des polynômes suivants.

1)
$$f(x) = 5(x - 6)(x + 3)$$

2)
$$g(x) = -3(-2x + 6)(x - 7)$$

3)
$$h(x) = -2(-x + 5)(2x - 3)$$

Exercice 3

Soit f une fonction polynôme du type $ax^2 + b$. Sa courbe représentative C_f intersecte l'axe des ordonnées en $y = 5$ et $(2\,;13) \in C_f$. Déterminer l'expression de $f(x)$.

Polynômes de degré 2

Corrigés

Exercice 1

Factoriser les expressions suivantes.

1)

$$A = x^2 - 36$$
$$A = (x+6)(x-6)$$

2)

$$B = 9x^2 - 25$$
$$B = (3x+5)(3x-5)$$

3)

$$C = 1 - 4y^2$$
$$C = (1-2y)(1+2y)$$

4)

$$D = (-2x+1)^2 - 4$$
$$D = (-2x+1-2)(-2x+1+2)$$
$$D = (-2x-1)(-2x+3)$$

5)

$$E = 25 - (2x+5)^2$$
$$E = \big(5-(2x+5)\big)\big(5+(2x+5)\big)$$
$$E = (5-2x-5)(5+2x+5)$$
$$E = -2x(2x+10)$$

Polynômes de degré 2

Exercice 2

Dresser le tableau de signe des polynômes suivants.

1)

$$f(x) = 5(x-6)(x+3)$$

x	$-\infty$	-3		6	$+\infty$
5	$+$		$+$		$+$
$x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2)

$$g(x) = -3(-2x+6)(x-7)$$

$$-2x+6 = 0 \; pour \; x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		7	$+\infty$
-3	$-$		$-$		$-$
$-2x+6$	$+$	0	$-$		$-$
$x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3)

$$h(x) = -2(-x+5)(2x-3)$$

$$-x+5 = 0 \text{ pour } x = 5$$
$$2x-3 = 0 \text{ pour } x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3

Soit f une fonction polynôme du type ax^2+b. Sa courbe représentative C_f intersecte l'axe des ordonnées en $y=5$ et $(2\,;13) \in C_f$. Déterminer l'expression de $f(x)$.

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2+b}$$

Comme C_f intersecte l'axe des ordonnées en $y=5$, $b=5$.

On obtient : $\boldsymbol{f(x) = ax^2+5}$

De plus, le point $(2;13)$ appartient aussi à la courbe, on conclut que :

$$\boldsymbol{f(2) = 13}$$

Mais $\boldsymbol{f(2) = a\times 2^2+5}$ donc on obtient : $\boldsymbol{a\times 2^2+5 = 13}$

$$\boldsymbol{4a+5 = 13}$$
$$\boldsymbol{a = \frac{8}{4} = 2}$$

Finalement on a : $\boldsymbol{f(x) = 2x^2+5}$.