Les Fonctions Affines

Révisions

Une **fonction affine** est une fonction du type :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b$$

On appelle a le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.

Sa courbe représentative est une **droite**.

- La direction de cette droite dépend de a, si je me positionne sur un point de ma droite et que j'avance de 1 sur les abscisses, alors je me déplace de a sur les ordonnées pour rejoindre la droite.
  - Si a est **positif**, la droite « monte », la fonction est **croissante**.
  - Si a est **négatif**, la droite « descend », la fonction est **décroissante**.
- Pour calculer a, il me faut connaitre deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ et appliquer cette formule :

$$a = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

- La « hauteur » de cette droite dépend de b, si je me positionne en $(0\ ;\ 0)$, alors je me déplace de b sur les ordonnées pour rejoindre ma droite. Autrement dit, $b = f(0)$.
- Pour calculer b, il me faut connaître a, et un point $(x, f(x))$, puis je résous l'équation suivante en remplaçant $f(x)$, x et a par les valeurs connues :

$$f(x) = ax + b$$

Exercices

Partie 1

Soit une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(1) = -1$ et $f(-1) = -5$.

1) Donner l'expression de la fonction f.
2) Etudier les variations de la fonction f.
3) Etudier le signe de la fonction f.

Partie 2

Soit une fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$, telle que $g(-2) = 7$ et $g(4) = -11$.

1) Donner l'expression de la fonction g.
2) Etudier les variations de la fonction g.
3) Etudier le signe de la fonction g.

Partie 3

1) Résoudre $g(x) < f(x)$.
2) Tracer les courbes des fonctions g et f dans un repère et vérifier le résultat obtenu à la question 1).

Partie 4

Soit une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2 - 20x + 25$.

1) Factoriser l'expression de $h(x)$.
2) Etudier le signe de la fonction h.

Partie 5

Soit une fonction j définie par :

$$j(x) = \frac{f(x)g(x)}{h(x)}$$

1) Donner le domaine de définition D de la fonction j.
2) Résoudre $j(x) > 0$.

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander.

Corrigés

Partie 1

Soit une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(1) = -1$ et $f(-1) = -5$.

1) Donner l'expression de la fonction f.

$\boldsymbol{f}$ est une **fonction affine** donc son expression est du type $\boldsymbol{ax + b}$.

Cherchons la valeur du coefficient directeur a.

$$\boldsymbol{a = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}}$$

Prenons $x = 1$ et $y = -1$.

On a alors :

$$a = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$

$$a = \frac{-1 - (-5)}{1 + 1}$$

$$a = \frac{-1 + 5}{2}$$

$$a = \frac{4}{2}$$

$$\boldsymbol{a = 2}$$

On a donc :

$$f(x) = 2x + b$$

On sait que $f(1) = -1$, donc on a :

$$f(1) = 2 \times 1 + b = -1$$

Nous pouvons résoudre cette équation pour trouver b :

$$2 \times 1 + b = -1$$

$$2 + b = -1$$

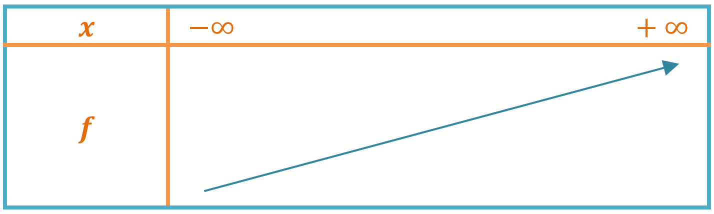
$$b = -1 - 2$$

$$\boldsymbol{b = -3}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{f(x) = 2x - 3}$$

2) Etudier les variations de la fonction f.



Comme $a = 2 > 0$, la fonction est croissante, donc elle « monte ».

3) Etudier le signe de la fonction f.

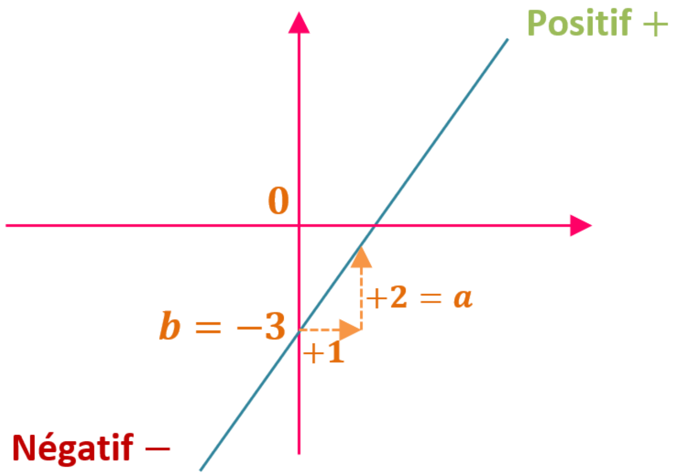
Pour étudier le signe de la fonction f, nous devons résoudre $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$
$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Maintenant nous pouvons réaliser un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Comme la fonction est croissante, les $f(x)$ sont d'abord négatifs puis positifs.



Partie 2

Soit une fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$, telle que $g(-2) = 7$ et $g(4) = -11$.

1) Donner l'expression de la fonction g.

$\boldsymbol{g}$ est une **fonction affine** donc son expression est du type $\boldsymbol{ax + b}$.

Cherchons la valeur du coefficient directeur a.

$$\boldsymbol{a = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}}$$

Prenons $x = -2$ et $y = 4$.

On a alors :

$$a = \frac{f(-2) - f(4)}{-2 - 4}$$

$$a = \frac{7 - (-11)}{-6}$$

$$a = \frac{7 + 11}{-6}$$

$$a = \frac{18}{-6}$$

$$\boldsymbol{a = -3}$$

On a donc :

$$g(x) = -3x + b$$

On sait que $g(-2) = 7$, donc on a :

$$g(-2) = -3 \times (-2) + b = 7$$

Nous pouvons résoudre cette équation pour trouver b :

$$-3 \times (-2) + b = 7$$

$$6 + b = 7$$

$$b = 7 - 6$$

$$\boldsymbol{b = 1}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{g(x) = -3x + 1}$$

2) Etudier les variations de la fonction g.

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$\searrow$	

Comme $a = -3 < 0$, la fonction est décroissante, donc elle « descend ».

3) Etudier le signe de la fonction g.

Pour étudier le signe de la fonction g, nous devons résoudre $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0$$
$$-3x + 1 = 0$$
$$-3x = -1$$
$$x = \frac{-1}{-3}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Maintenant nous pouvons réaliser un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Comme la fonction est décroissante, les $g(x)$ sont d'abord positifs puis négatifs.

Partie 3

1) Résoudre $g(x) < f(x)$.

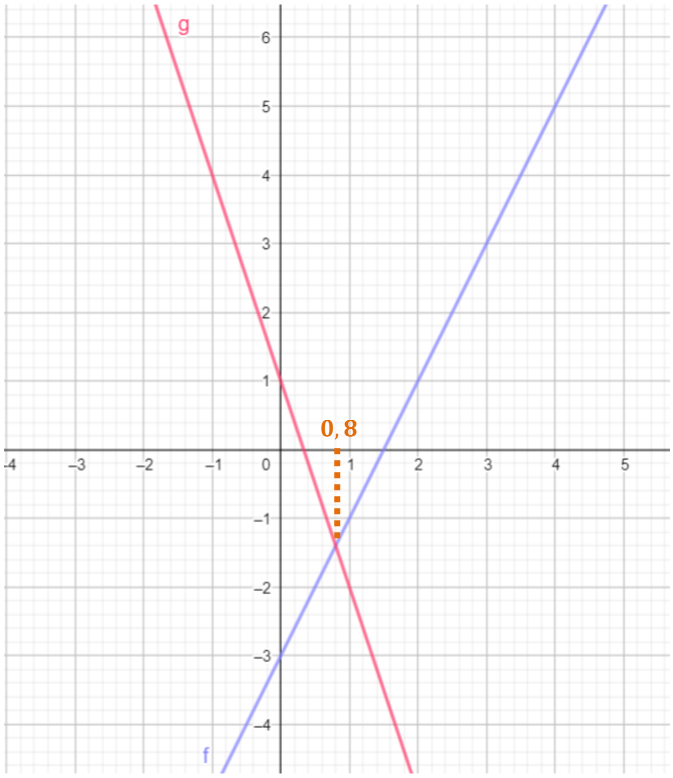
$$g(x) < f(x)$$
$$-3x + 1 < 2x - 3$$
$$-3x - 2x < -3 - 1$$
$$-5x < -4$$
$$x > \frac{-4}{-5}$$

Comme -5 est **négatif**, on **renverse l'ordre**.

$$x > \frac{4}{5}$$

$$S = \left]\frac{4}{5}; +\infty\right[$$

2) Tracer les courbes des fonctions g et f dans un repère et vérifier le résultat obtenu à la question 1).



La courbe de f intersecte la courbe de g en $0{,}8 = 4/5$, avant l'intersection, la courbe de f est en-dessous la courbe de g, et après l'intersection la courbe de f est au-dessus la courbe de g. Cela correspond au résultat obtenu à la question 1).

Partie 4

Soit une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2 - 20x + 25$.

1) Factoriser l'expression de $h(x)$.

$$h(x) = 4x^2 - 20x + 25$$
$$h(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2$$
$$\boldsymbol{h(x) = (2x - 5)^2}$$

2) Etudier le signe de la fonction h.

Un carré est toujours positif ou nul, donc $\boldsymbol{h(x) \geq 0}$ **,** $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$.

$$2x - 5 = 0$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Donc $h(x) = 0$ pour $x = \frac{5}{2}$.

Partie 5

Soit une fonction j définie par :

$$j(x) = \frac{f(x)g(x)}{h(x)}$$

1) Donner le domaine de définition D de la fonction j.

$j(x)$ est une fonction **quotient**. Son **dénominateur** ne peut **pas** être **nul**.

Donc on a $h(x) \neq 0$, donc $x \neq \frac{5}{2}$.

$$D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\} =]-\infty; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$$

2) Résoudre $j(x) > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	||	$-$	
$h(x)$		$+$	|	$+$	|	$+$	||	$+$	
$j(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	

$$S =]\frac{1}{3}; \frac{3}{2}[$$

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander.