

Exercices

Exercice 1

On s'intéresse ici à plusieurs dés truqués à 6 faces. Dans tous les cas indiqués, X est la variable aléatoire qui donne le chiffre obtenu lors du lancer de dé.

Partie 1 : Dé truqué n°1

- 1) Compléter la loi de probabilité de ce dé. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	

- 2) Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X pour le 1^{er} dé.

Partie 2 : Dé truqué n°2

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est deux fois plus grande que celle de faire un « 5 ». Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1		



Exercices

Partie 3 : Dé truqué n°3 (difficulté ★★★)

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est le carré de celle de faire un « 5 ». Arrondir au centième. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1		



Exercices

Exercice 2

Un casino a décidé d'installer un nouveau jeu pour ses habitués. Une machine affiche un écran tactile avec 200 rectangles identiques, sur lesquels le joueur peut appuyer. Pour cela il mise 2 euros.

Puis une fois qu'un des rectangles est pressé, il affiche le résultat :

- ❖ 2 rectangles font gagner 24€.
- ❖ 4 rectangles font gagner 12€.
- ❖ 10 rectangles font gagner 5€.
- ❖ 54 rectangles font gagner 0,50€.
- ❖ pour les autres rectangles, le joueur ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par G ?
- 2) Établir la loi de probabilité de G .
- 3) Calculer l'espérance de G . Interpréter.



Exercices

4) Le directeur du casino trouve que le gain apporté par ce nouveau jeu est faible pour son entreprise. Il a fait installer 4 machines. Sur chacune des machines passent 70 clients par jour.

Le directeur souhaite que les machines lui rapportent 336 € au total sur une journée. Pour cela il modifie le gain de la valeur maximale. À combien doit-il fixer ce gain pour espérer un tel revenu ?



Corrigés

Exercice 1

On s'intéresse ici à plusieurs dés truqués à 6 faces. Dans tous les cas indiqués, X est la variable aléatoire qui donne le chiffre obtenu lors du lancer de dé.

Partie 1 : Dé truqué n°1

- 1) Compléter la loi de probabilité de ce dé. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,225

$$\begin{aligned}P(X = 6) &= 1 - \sum_{i=1}^5 P(X = x_i) \\ &= 1 - (0,025 + 0,05 + 0,1 + 0,2 + 0,4) \\ &= 0,225\end{aligned}$$

- 2) Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X pour le 1^{er} dé.

$$\begin{aligned}E(X) &= 0,025 \times 1 + 0,05 \times 2 + 0,1 \times 3 + 0,2 \times 4 \\ &\quad + 0,4 \times 5 + 0,225 \times 6 = 4,575\end{aligned}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n \left(P(X = x_i) (x_i - E(X))^2 \right)$$

$$\begin{aligned}V(X) &= 0,025 \times (1 - 4,575)^2 + 0,05 \times (2 - 4,575)^2 \\ &\quad + 0,1 \times (3 - 4,575)^2 + 0,2 \times (4 - 4,575)^2 \\ &\quad + 0,4 \times (5 - 4,575)^2 + 0,225 \times (6 - 4,575)^2 \\ &= 1,49\end{aligned}$$



Corrigés

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,49} = 1,22$$

Ce que l'on trouve à la calculatrice :

rad STATISTIQUES			
Données	Histogramme	Boîte	Stats
Valeurs V1	Effectifs N1	Valeurs V2	
1	0.025		
2	0.05		
3	0.1		
4	0.2		
5	0.4		
6	0.225		

rad STATISTIQUES			
Données	Histogramme	Boîte	Stats
		V1/N1	
Effectif total	$\sum n$	1	
Minimum	Min	1	
Maximum	Max	6	
Etendue	E	5	
Moyenne	\bar{x}	4.575	
Ecart type	σ	1.222446	
Variance	var	1.494375	
Premier quartile	Q1	4	



Corrigés

Partie 2 : Dé truqué n°2

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est deux fois plus grande que celle de faire un « 5 ». Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4

D'après l'énoncé, on a :

$$P(X = 6) = 2P(X = 5)$$

$$P(X = 5) = 1 - \sum_{i=1}^4 P(X = x_i) - 2P(X = 5)$$

$$3P(X = 5) = 1 - \sum_{i=1}^4 P(X = x_i)$$

$$3P(X = 5) = 0,6$$

$$P(X = 5) = \frac{0,6}{3} = 0,2$$

$$P(X = 6) = 2P(X = 5) = 2 \times 0,2 = 0,4$$



Corrigés

Partie 3 : Dé truqué n°3

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est le carré de celle de faire un « 5 ». Arrondir au centième. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1	$\frac{-1 + \sqrt{3,4}}{2}$	$\frac{11 - \sqrt{85}}{10}$

D'après l'énoncé, on a :

$$P(X = 6) = P(X = 5)^2$$

$$P(X = 5) = 1 - \sum_{i=1}^4 P(X = x_i) - P(X = 5)^2$$

$$P(X = 5) = 0,6 - P(X = 5)^2$$

$$P(X = 5)^2 + P(X = 5) - 0,6 = 0$$

Cela revient à résoudre :

$$x^2 + x - 0,6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0,6) = 3,4 > 0$$

Donc on a deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{3,4}}{2} < 0$$

Donc x_1 n'est pas une solution possible.



Corrigés

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3,4}}{2} > 0$$

Donc :

$$P(X = 5) = \frac{-1 + \sqrt{3,4}}{2}$$

$$P(X = 6) = P(X = 5)^2 = \frac{11 - \sqrt{85}}{10}$$



Corrigés

Exercice 2

Un casino a décidé d'installer un nouveau jeu pour ses habitués. Une machine affiche un écran tactile avec 200 rectangles identiques, sur lesquels le joueur peut appuyer. Pour cela il mise 2 euros.

Puis une fois qu'un des rectangles est pressé, il affiche le résultat :

- ❖ 2 rectangles font gagner 24€.
- ❖ 4 rectangles font gagner 12€.
- ❖ 10 rectangles font gagner 5€.
- ❖ 54 rectangles font gagner 0,50€.
- ❖ pour les autres rectangles, le joueur ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire correspondant au **gain algébrique** du joueur.

1) Quelles sont les valeurs prises par G ?

Les valeurs prises par G sont 22 ; 10 ; 3 ; -1,5 et 2.



Corrigés

2) Établir la loi de probabilité de G.

x_i	22	10	3	-1,5	-2
$P(X = x_i)$	0,01	0,02	0,05	0,27	0,65

3) Calculer l'espérance de G. Interpréter.

$$E(X) = 0,01 \times 22 + 0,02 \times 10 + 0,05 \times 3 \\ + 0,27 \times (-1,5) + 0,65 \times (-2) = -1,135$$

Le Casino peut espérer gagner en moyenne 1,135€ par joueur.

4) Le directeur du casino trouve que le gain apporté par ce nouveau jeu est faible pour son entreprise. Il a fait installer 4 machines. Sur chacune des machines passent 70 clients par jour.

Le directeur souhaite que les machines lui rapportent 336 € au total sur une journée. Pour cela il modifie le gain de la valeur maximale. À combien doit-il fixer ce gain pour espérer un tel revenu ?

$$70 \times 4 = 280 \text{ clients/jour}$$

$$\frac{336}{280} = 1,2 \text{ €}$$

Donc l'espérance devrait être de -1,2€.



Corrigés

Donc il faut résoudre :

$$E(X) = 0,01 \times (x - 2) + 0,02 \times 10 + 0,05 \times 3 \\ + 0,27 \times (-1,5) + 0,65 \times (-2) = -1,2$$

$$0,01x - 0,02 + 0,2 + 0,15 - 0,405 - 1,3 = -1,2$$

$$0,01x - 1,375 = -1,2$$

$$0,01x = -1,2 + 1,375$$

$$x = \frac{0,175}{0,01}$$

$$x = 17,5$$

Le gain maximum doit être fixé à 17,50€ pour espérer un tel revenu.

