Les Probabilités

❖ Vocabulaire

Prenons pour exemple l'expérience suivante :

On lance un dé (non pipé) à 6 faces, et on regarde le résultat obtenu.

Une expérience aléatoire est une expérience dont nous connaissons les résultats (**issues**) possibles mais dont nous ne pouvons pas prévoir le résultat qui se produira.

→ ***Dans notre exemple, les 6 issues possibles sont $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$, mais nous ne savons pas sur quelle face nous allons tomber.***

L'ensemble de toutes les issues possibles forment **l'univers** que l'on note $\boldsymbol{\Omega}$.

Un évènement est une condition qui peut être réalisée par une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

- **Un évènement élémentaire** est réalisé par **une seule issue**.

→ ***Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre paire » est composé de 3 issues : $\{2\,;4\,;6\}$. Ce n'est donc pas un évènement élémentaire.***

→ ***Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un multiple de 5 » est composé d'une seule issue : $\{1\}$. C'est donc un évènement élémentaire.***

❖ Calcul de Probabilité

La **probabilité** d'un évènement A est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance » qu'a l'évènement A de se produire ». On note cette probabilité $p(A)$ et elle se calcule comme suit :

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{Nombre\ d'issues\ total}$$

Exemple :

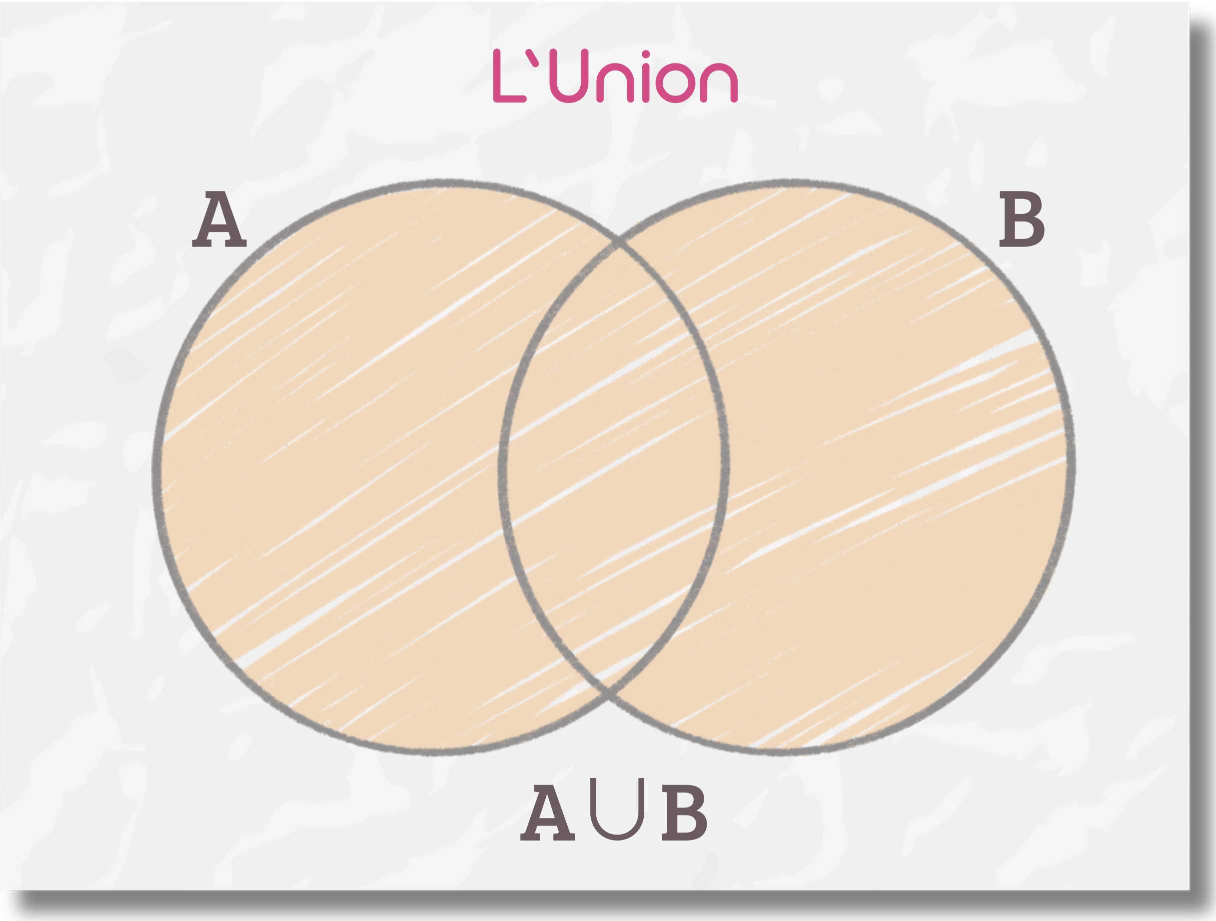
Quelle est la probabilité de l'évènement A : « obtenir un nombre pair » ?

$$A : \{2 ; 4 ; 6\} \text{ et } \Omega = \{1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

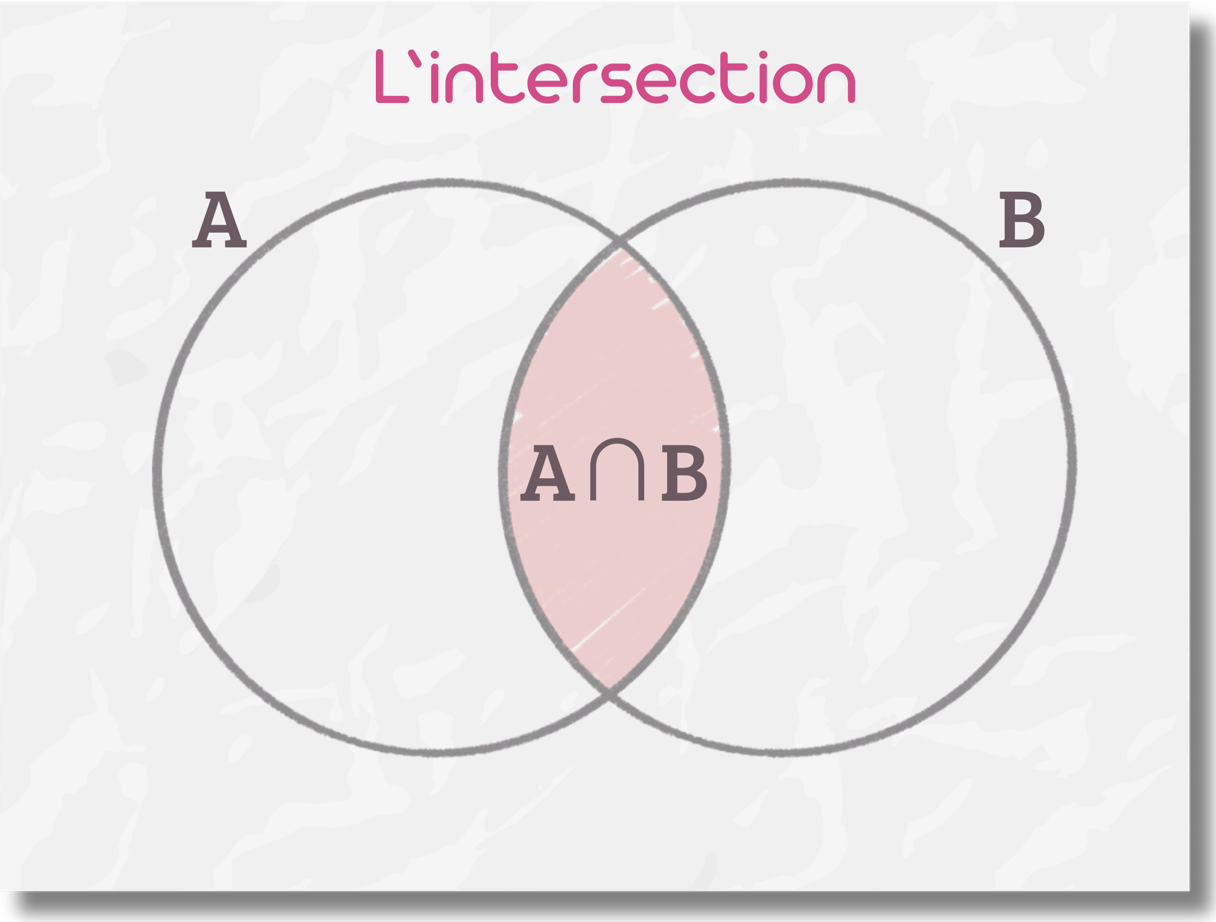
$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{Nombre\ d'issues\ total} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{1}{2}$.

L'intersection de deux événements A et B est l'ensemble des issues qui sont à la fois dans A **ET** dans B. On note $\boldsymbol{A \cap B}$.



L'union de deux événements A et B est l'ensemble des issues qui sont, **OU** dans A, **OU** dans B, **OU** dans les deux. Ce « ou » est dit non-exclusif. On note $\boldsymbol{A \cup B}$.



- **Un évènement certain** est un évènement réalisé par toutes les issues.

  → *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre entre 0 et 10 » est composé de toutes les issues possibles : $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$. C'est donc un évènement certain.*

- **Un évènement impossible** est un évènement réalisé par aucune des issues.

  → *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre négatif » ne peut être réalisé par aucune issue. C'est donc un évènement impossible.*

L'événement contraire de l'évènement A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les issues d'une même expérience aléatoire n'appartenant pas à A.

→ *Dans notre exemple, les évènements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre impair » sont contraires. En effet : $A = \{2\,;4\,;6\}$ et $B = \{1\,;3\,;5\}$. On note alors $B = \overline{A}$.*

Deux événements incompatibles sont deux évènements qui ne peuvent pas se produire en même temps.

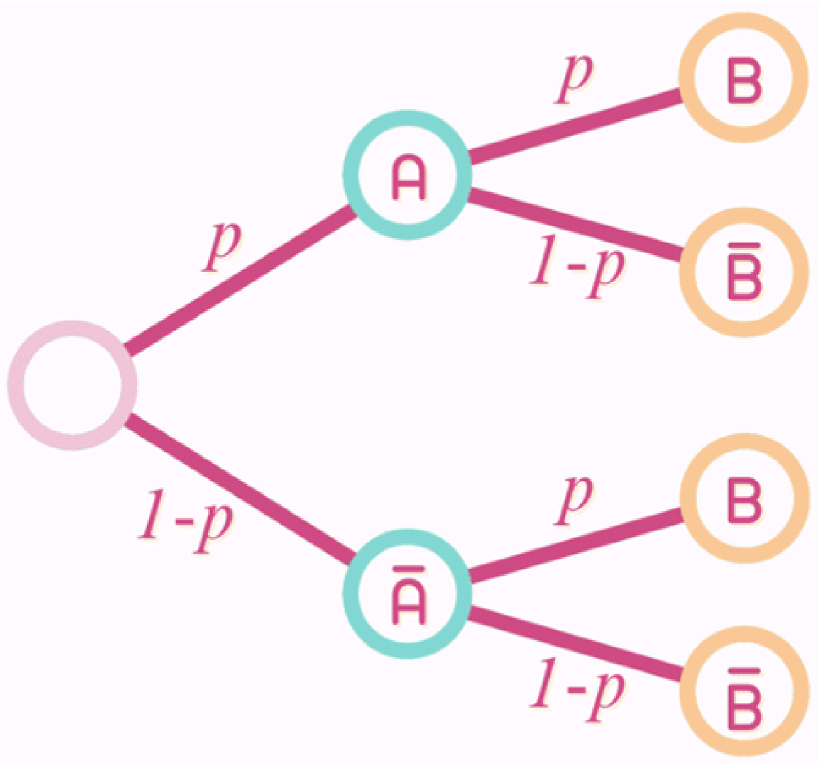
→ *Dans notre exemple, les évènements A : « le nombre obtenu est 4 » et B : « le nombre obtenu est un nombre premier » sont incompatibles. En effet : $A = \{4\}$ et $B = \{1\,;2\,;3\,;5\}$.*

- Un évènement dont la probabilité est **égale à 0** est un **évènement impossible**.
- Un évènement dont la probabilité est **égale à 1** est un **évènement certain**.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

❖ **Arbre Pondéré ou Arbres de Probabilité**

Pour visualiser l'expérience et la probabilité de chaque issue, il est fortement conseillé de réaliser un arbre pondéré.

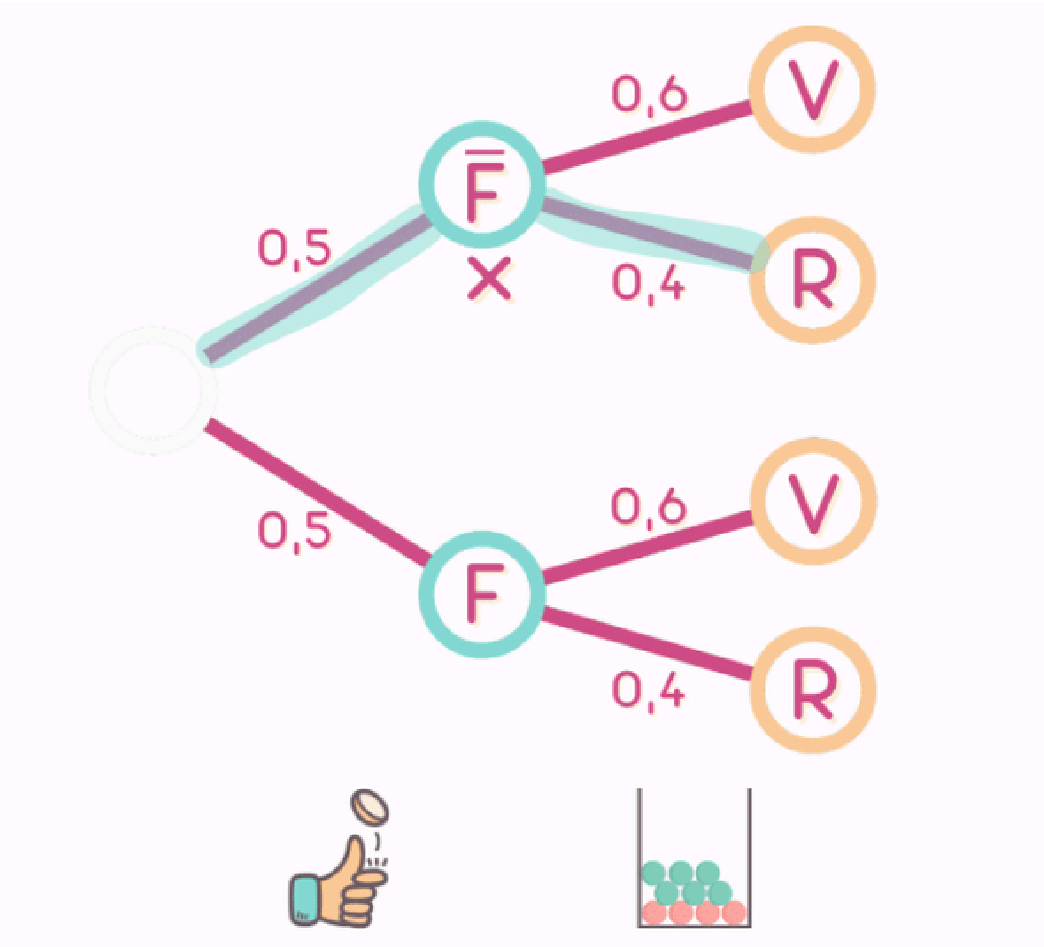
Prenons par exemple deux évènements A et B indépendants.
On note p la probabilité de l'évènement A et q la probabilité de l'évènement B.
L'arbre pondéré de cette situation est le suivant :



Le point de départ des branches s'appelle un nœud. Par exemple, le point d'où partent la branche qui va à A et la branche qui va à $\bar{A}$ est un nœud.

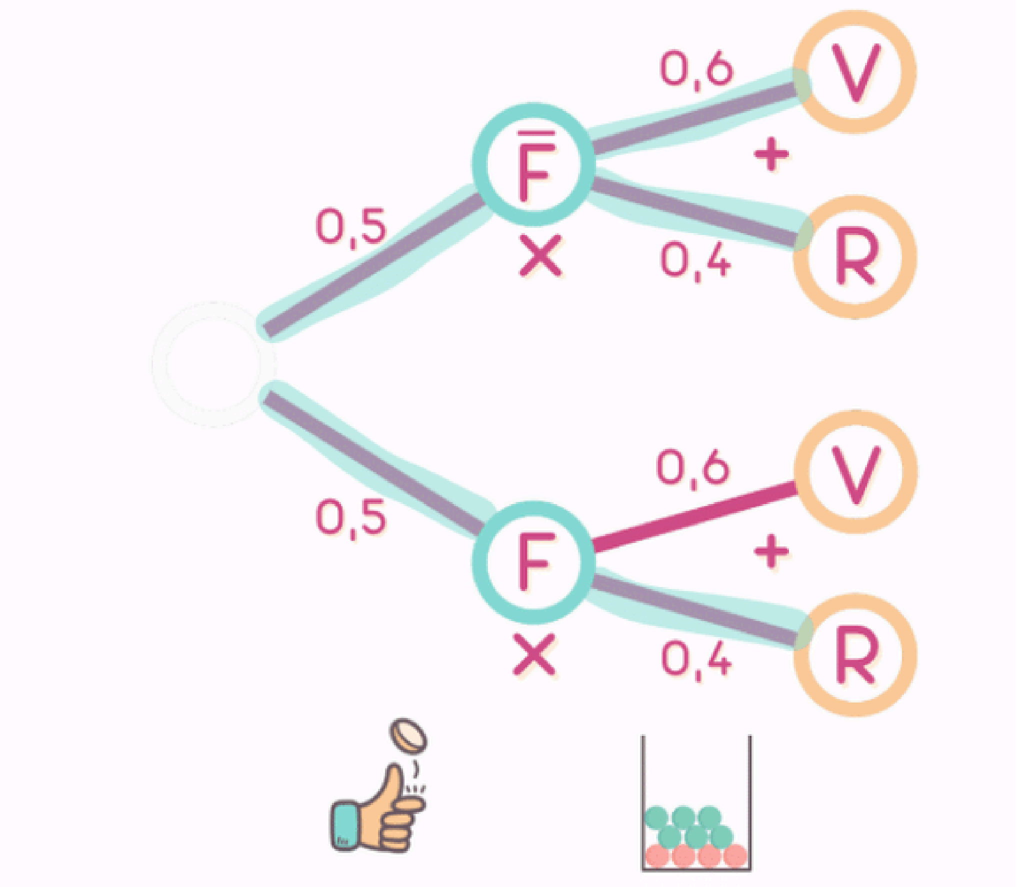
Cet arbre nous aide à trouver des probabilités.

Exemple 1 :



$$P\left(F \cap R\right) = 0,5 \times 0,4 = 0,20$$

Exemple 2 :



$$P(\bar{F} \cup R) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(V) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R) + P(F) \times P_F(R)$$

$$P(\bar{F} \cup R) = 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}4$$

$$P(\bar{F} \cup R) = 0{,}7$$

Deux événements indépendants sont deux évènements qui ne dépendent pas l'un de l'autre. Deux évènements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

→ ***Dans notre exemple, nous lançons le dé deux fois de suite. Soient les évènements A : « j'obtiens un nombre pair au premier lancé » et B : « j'obtiens un multiple de 3 au deuxième lancé ». Ces deux évènements ne dépendent pas l'un de l'autre, ils sont indépendants. On a*** $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}}$.

Remarque :

- La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de B sachant A (c'est-à-dire dans la situation où A est réalisé), s'écrit $P_A(B)$. On retrouve cette probabilité sur la branche qui lie A à B.

❖ **Formules**

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$$
$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$$

$$\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$